现代应用数学丛书

微分方程的近似解法

〔日〕加藤敏夫 藤田宏 橋本英典 中田義元 著



上海科学技术出版社

统一书号 13119·557
定 价 1.45 元

现代应用数学丛书

微分方程的近似解法

〔日〕加藤敏夫　藤田宏　橋本英典　中田義元　著

張毓椿　王占瀛　刘宝田　譯

蔣尔雄　校

上海科学技术出版社

內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本，主要介紹近似地解微分方程的各种方法。全书可分为三部分。第一部分是一般的古典的近似解法，第二部分介紹由差分方程来作近似計算，第三部分研究攝动法及漸近展开有关的問題。

本书介紹的近似解法种类很多，对每一种方法都有具体例子加以說明，并适当地指出了一些理論依据。可供工程技术人員，数学工作者特別是計算数学工作者参考。

原书分三册出版，現合并成一册。

微分方程式の近似解法 I. II. III.

〔日〕加藤敏夫 藤田宏 橋本英典 中田義元

岩波书店 1958

現代应用数学丛书

微分方程的近似解法

张鍠楷 王[illegible] 蒋尔雄 校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海大东集成联合印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32　印張 8 16/32　排版字数 200,000

1964年5月第1版　1964年5月第1次印刷　印数 1—4,000

統一书号 13119·557　定价（十四）1.45元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地減少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学	彌永昌吉等	熊全淹
几何学	矢野健太郎	孙泽瀛
复变函数論	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·测度	河田敬义	賴英华
泛函分析	吉田耕作	程其襄
广义函数	岩村联	杨永芳
常微分方程	福原满洲雄	張庆芳
偏微分方程	南云道夫	錢端壮
特殊函数	小谷正雄等	錢端壮
差分方程	福田武雄	穆鴻基
富里哀变换与拉普拉斯变换	河田龙夫	錢端壮
变分法及其应用	加藤敏夫	周怀生
李群論	岩堀长庆	孙泽瀛
随机过程	伊藤清	刘璋温
回轉群与对称群的应用	山内恭彦等	張質賢
結晶統計与代数	伏見康治	孙泽瀛
偏微分方程的应用*	犬井鉄郎等	杨永芳
微分方程的近似解法*	加藤敏夫等	王占瀛
数值計算法	森口繁一等	關昌齡
量子力学中的数学方法	朝永振一郎	周民强
工程力学系統	近藤一夫等	刘亦珩
非綫性振动論	古屋茂	吕紹明
力学系与映射理論	岩田义一	孙泽瀛
平面彈性論	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論 变形几何学	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
塑性論	鷲津久一郎	刘亦珩
粘性流体理論	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論	喜安善市等	陆志刚
自动控制理論	喜安善市等	翟立林
网絡拓扑学	近藤一夫	張設
信息論	喜安善市等	李文清
推断統計过程論*	北川敏男	刘璋温
統計分析	森口繁一	刘璋温
試驗設計法	増山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論	木村資生	刘祖洞
博奕論	宮澤光一	張鍾楷
綫性規划	森口繁一	刘源張
經济理論中的数学方法	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用	河田龙夫	刘璋温
計算技术*	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机*	森口繁一	刘源張

注： 本丛书中除注有*者外均已出版，有*者即将于最近出书。

目　录

出版說明
前言……1
§ 1　本书的基本精神……1
§ 2　內容……2
§ 3　記号和方法……3
第1章　展开級数的解法……8
§ 4　序論……8
§ 5　按滿足微分方程的函数展开……8
§ 6　无穷阶联立一次方程組的理論……14
§ 7　按滿足边界条件的函数展开……16
§ 8　用局部适合法决定展开系数……18
§ 9　級数收斂性的改进……19
第2章　积分方程的近似解法……26
§ 10　序論……26
§ 11　由求积公式化为代数方程的解法……26
§ 12　Neumann 級数解法……31
§ 13　积分方程对 Dirichlet 問題的应用……35
§ 14　用退化核的近似解法……41
第3章　逐次近似法……47
§ 15　方法例举……47
§ 16　逐次近似法的理論……48
§ 17　对于联立方程組的逐次近似法……53
§ 18　对于初始值問題的逐次近似法……55
§ 19　对于非綫性微分方程边界値問題的应用……60
§ 20　一般化的 Newton 法……64
第4章　变分法近似解法……67
§ 21　一般說明……67
§ 22　Ritz 方法 I……70

§ 23 Ritz 方法 II……75
§ 24 固有值的近似計算……77
§ 25 化为常微分方程的解法……82
第 5 章 边界值問題的差分法近似解法……86
§ 26 方法示例……86
§ 27 格子……90
§ 28 近似差分方程的定义……92
§ 29 近似差分算子的构成(常微分)……96
§ 30 近似差分算子的构成(偏微分)……99
§ 31 在滿足微分方程的函数类上的近似度……102
§ 32 多点近似法……106
§ 33 近似边界条件,近似边界值問題的定义……108
§ 34 近似边界条件的构成(常微分)……111
§ 35 近似边界条件的构成(偏微分)……113
§ 36 近似边界值問題解的存在……115
§ 37 适定性,稳定性……119
§ 38 关于收斂性,誤差估計的定理……123
§ 39 誤差的漸近形式……126
§ 40 討論收斂性,誤差的例子……128
§ 41 固有值問題……135
§ 42 数值解法……138
第 6 章 初始值問題的差分法近似解法……141
§ 43 預备,規定……141
§ 44 近似初始值問題的例子……141
§ 45 分析收斂性的例子……144
§ 46 用指数分析稳定性及其他……148
§ 47 用变数分离法分析稳定性……151
§ 48 关于初始条件的稳定性和关于方程的稳定性……155
§ 49 $t\to\infty$ 时的稳定性……157
第 7 章 攝动法……159
§ 50 常微分方程的初始值問題……159
§ 51 边界值問題……162

§ 52 固有值問題……166
§ 53 固有值問題(續)……170
第 8 章 WKB 法……175
§ 54 引言……175
§ 55 无轉移点的情形……178
§ 56 Liouville 变换……181
§ 57 无轉移点情形的精密化……184
§ 58 $P(z)=a(z-z_0)^n$ 的情形……188
§ 59 轉移点近傍的解和延拓公式……190
§ 60 延拓公式的应用……197
§ 61 在轉移点近傍近似的精密化(1)……200
§ 62 精密化(續)……204
§ 63 偏微分方程……206
第 9 章 Poincaré-Lighthill-郭永怀方法及边界层方法……212
§ 64 引言……212
§ 65 常微分方程 $(x+\varepsilon u)u'+q(x)u-r(x)=0$……223
§ 66 $q_0>0$ 的情形……227
§ 67 $q_0=0$ 的情形……231
§ 68 $q_0\leqq-1$ 的情形……232
§ 69 $-1<q_0<0$ 的情形……237
§ 70 Lighthill 法对 $q_0=-\varkappa<0$ 的变形……239
§ 71 其他情形与方法的界限……242
§ 72 偏微分方程……247
§ 73 边界层法……252
参考文献……260

前　言

§1 本书的基本精神

如果說，古典的"应用数学"和微分方程的解法具有相同的涵意，基本上是沒有錯誤的。虽然，这种說法因現代应用数学的范圍极为广泛而不够正确了。但是，微分方程在应用数学中仍然占有重要的地位，这一点并沒有絲毫的改变。

微分方程在理論上或应用上都具有悠久的历史，分支又极为广泛，企图編写一部完整的微分方程书稿，必然要众多的人員和大量的篇幅。因此，即使象本丛书这样的一部书，也很难达到这个愿望。幸而关于常微分方程和偏微分方程的基本理論，已經分别有独立的項目，另外以变分法为主的偏微分方程的解法，也单独地进行了探討，所以本书的目的，主要只是闡述近似地解微分方程的各种方法。因而在本书里并沒有完整的方法的理論。只不过是列举了一些一般的方法而已。

本书概括地称为微分方程的近似解法。但实际上，微分方程的种类极为繁多，所用的方法也是千差万別，要想把这些都說出来是不可能的。对于特殊問題，还有适合它的特殊方法，因此，近似方法的一般理論是不存在的。从而在微分方程近似解法的名称下，究竟应包括一些什么內容，亦不很明确。但是，考慮到微分方程經常不能找到正确解，想用完善的理論来解决問題相当困难，因而加入这个項目还是必要的。根据这种情况，本书选擇了特殊性特别少的，比較一般的，具有代表性的近似解法，并尽可能以折衷的态度，在統一的观点下予以說明。希望不要把在这里所提出的方法，当成包括一切近似解的方法。此外，将杂乱地选出的材料加以統一整理，也是件困难的工作，限于著者的能力，因此本书內容显得龐杂，希望讀者諒解。

本书的基本精神，已如上述。关于微分方程的基本知識，希望参考有关书籍。在这里假定讀者已經掌握了一般知識，例如已知偏微分方程大致分为橢圓型、双曲型、抛物型等。

§2 內 容

为了方便起見，将整个內容分为三个部分。

第一部分是比較簡单，而且是古典的近似解法，然而它具有一般性，其中有級数展开法，将微分方程变为积分方程的近似解法，逐次近似法及变分法等。級数展开法在"正确"解法中也常用，但这里是从近似解法的角度来論述的。积分方程的內容不屬于本书的范圍，但是它和微分方程有密切的关系，所以将有关的必要的部分，列入本书中。逐次近似法虽然可直接应用于微分方程，然而普通都是将問題化为积分方程(或与其相当的)，然后再用这个方法。变分法的解法不一定屬于古典的近似解法，但为了方便起見，也把它列入这部分中。这种方法在"变分法及其应用"一书中还要涉及到，希望讀者一并閱讀。第一部分主要是由中田義元編写的。

第二部分是用差分方程来近似計算微分方程，从而将問題归結成有限个变数的方程(通常是代数方程)。这个方法本来是最原始的，最近却迅速地发展起来。这是因为虽然它的原理非常簡单，但計算比較麻煩，在計算机器尙不发达的年代里，是不便于应用的。因此，在用笔算的时代里，几乎毫无用处。但从使用手摇計算机以后，它就被逐漸重視起来。然而除特殊情况外，还只限于解常微分方程，而且只在其他方法不能解决时，作为最后手段才使用它。事实上，用这个方法要想求得較好的近似解，必須把差分区間或格子間隔分得越細越好，可是未知数的数目太大时，在計算上就会感到麻煩。

現代由于高速計算机的出現，情况就完全不同了。虽然高速計算机不是万能的，但它能够解含有相当多个未知数的方程，以至能用差分法解偏微分方程。这是一种不拘方程形式的一般的方法。随着計算机的发展，它的应用价值也逐漸增大，所以它是将来最有希望的近似解法。为了有效地利用它，对于在理論上的研究，尤其是在誤差的估計方面，极为重要。由于这种原因，所以在本书中关于用差分法的近似解法，在理論上的探討占的篇幅比較多。所謂这种方法不拘于方程的形式，只是說任何形式的方程都可适用，但不是意味着应用时的具体方法在任何时候都一样。实际上，一种差分格式是否合适，对椭圓型和双曲型方程的判別法，很明显地就完全不同。第二部分由藤田宏执笔。

第三部分是所討論的問題中含有小參数 ε，当 $\varepsilon\to0$ 时的极限的解。也就是研究所謂攝动法及漸近展开的有关問題．这类問題在物理和工程学上

經常出現。当解可展开为 ε 的幂級数时称之为攝动法，不能展开时称之为漸近展开，但这种区别并不是絕对的。即或有普通称为攝动法，而实际上只是漸近展开的情况亦很多，按这种意义来說，这里討論的問題本质上是漸近展开理論。在这种类型的理論中，对特殊重要的 WKB 法和 PLK 法討論得比較詳尽。它們在流体力学中有广泛的应用。第二部分主要由橋本英典編写。本书的全部計划，以及各册的分工，是由全体著者共同討論而确定的。

§3 記号和方法

如上所述，虽然本书力求内容上統一，但仍然作得很不够。所使用的方法也是各种各样。由于問題的性质，我們必須較多的借用泛函分析的記号和术語。

使用泛函分析的方法探討微分方程是很自然的，这也是泛函分析的目标之一。对于数学工作者来說是沒有問題的。在本丛书中引入了很多抽象数学的项目，特别是設置了泛函分析項目。因此，对于用本丛书学习应用数学的人来說，不会感到不方便。但是从历史的傳統来看，学应用数学的人，对抽象数学的术語和記号多少有些不感兴趣。因此在和应用关系最密切的本丛书中，有必要对所使用的泛函分析的記号加以說明。著者已經力求尽可能最少地使用抽象的术語和記号，但这也有一定限度。因为如果完全不使用，反而会使表示式冗長，論述不明确，这样做，显然沒有任何好处。所以我們尽量只在必要时，最小限度地使用抽象数学的記号和术語，希望讀者諒解。

以后所使用的主要是术語和記号，并未隨便使用抽象数学或泛函分析中的較高深的有关定理。因而只要讀者簡单地复习一下所用到的必要的术語和記号就够了，这样作不会有什么困难。为了讀者方便起見，就本书經常出現的有关函数空間的几个記号加以說明，以帮助讀者进行复习。只要把这里的說明略加閱讀，則对本书内容的理解上，就不会有任何困难。

1) **函数空間** 微分方程或者一般数学分析的中心問題，是研究一个或几个变数(将它們一并記成 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$)的函数 $u(x)$. 对此函数 $u(x)$ 进行微分运算，积分运算或代数运算，并討論其間的关系。但是在泛函分析上将函数 $u(x)$ 看做是点，称为点 u. 所謂点是指某“空間”的点，此空間是同类函数的集合所成的**函数空間**。有各种各样的函数空間，下面举几个例子。

連續函数的全体是一个函数空間。正确地說，是定义在以 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为变数的区域 D 上的連續函数的全体，常以 $C(D)$ 表示。又将在 D

上m阶导数連續的函数全体記作$C^m(D)$(当$m=1, 2, \cdots$时,記作$C', C'', \cdots$等),特别当D是$a \leqq x \leqq b$时,記作$C[a, b], \cdots, C^m[a, b]$. 若沒有必要指出定义域时,簡单地記它們为$C, C^m$. 因而$u \in C$($u$属于$C$)和"$u$是連續函数"的意义是相同的。譬如$u \in C^4$是指"$u$的4阶导数連續"。这里虽然只是节約了几个字,但是如果使用的次数很多时,就可以节約很大的篇幅。

2) **距离空間** 引入函数空間的概念,不仅仅是为了节約字数而采用的簡略記法,将普通空間中的几何概念适当地扩張到函数空間中,加以有效地利用,也是我們的意图之一。例如两点的距离就是其中之一。对函数空間C, C^m等,可适当地定义两点u, v的距离。例如D为閉区間时,一般在空間$C(D)$,用

$$\max_{x \in D} |u(x)-v(x)| \tag{3.1}$$

定义两点u, v的距离。以后要常常用到这种定义。但是距离概念并不是固定不变的,因而沒有理由必須采用上面的定义。对預先給定的函数$W(x)>0$也可以采用

$$\max_{x \in D} \frac{|u(x)-v(x)|}{W(x)} \tag{3.2}$$

作为距离的定义。以后将經常使用这个定义。有时也采用

$$\left[\int_D |u(x)-v(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

作为距离的定义。总之,根据处理問題的方便,可使用适当的定义。

但是定义距离概念,至少要滿足以下的条件:

(i) 相同点的距离为0,相异两点的距离为正。

(ii) 两点u, v的距离与v, u的距离相等。

(iii) 三角形任何二边长度的和不小于第三边的长度。

一般将滿足这些条件的空間称为**距离空間**。容易知道,以上所举的例(3.1),(3.2),(3.3)是滿足这些条件的。

再举一个例子。对于空間$C^1(D)$,可用

$$\max_{x \in D} |u(x)-v(x)| + \max_{x \in D} |u'(x)-v'(x)| \tag{3.4}$$

定义u, v的距离。

3) **向量空間,賦范空間** 上面的例子中所提出的距离定义,无論是那一种,都用了函数的差$u-v$. 一般在函数空間F中,若两函数u, v属于F,其綫性結合$\alpha u+\beta v$也属于F时,称F为**向量空間**或**綫性空間**。此时F中的函

数可以看作是向量。上面定义的函数空間 C, C^m 等都是向量空間。

在向量空間 F 中，若定义了向量的"长度"（或者范数）$\|u\|$，则称 F 为赋范空間。但范数須滿足下面的条件：

（i）$\|u\|\geqq 0$，且 $\|u\|=0$ 只在 $u=0$ 时成立；

（ii）$\|\alpha u\|=|\alpha|\,\|u\|$；

（iii）$\|u+v\|\leqq\|u\|+\|v\|$.

若 F 为赋范空間，則 F 也可以认为是距离空間，因为可采用 $\|u-v\|$ 作为 F 中两点 u, v 的距离。

在函数空間 C, C^m 等上，所定义的距离(3.1)～(3.4)，实际上都是从范数导出的，例如(3.1)的定义，相当于采用

$$\|u\|=\max_{x\in D}|u(x)| \tag{3.5}$$

为范数。在应用上所出現的函数空間，許多都是赋范空間。但是，距离空間并不都是赋范空間，例如在区間 $a\leqq x\leqq b$ 內連續且滿足边界条件 $u(a)=u(b)=1$ 的函数 u 的全体，若用(3.1)定义距离时，則它是距离空間而不是向量空間，因而更不是赋范空間。象这样单是距离空間的空間，u, v 的距离不能表示为 $\|u-v\|$，但在本书中为了方便起見，距离一律用 $\|u-v\|$ 来表示。因而在一般的距离空間中，它仅仅是約定的符号。实际上，在大多数情况下，F 是赋范空間，或者是它的部分集合，所以这样的約定，并不会引起障碍。

4）收斂、极限 导出了距离空間 F 的两点 u, v 的距离 $\|u-v\|$ 之后，就可定义关于点列（函数列）u_1, u_2, …收斂的概念。即若

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|=0 \tag{3.6}$$

时，則称 u_n 收斂于 u，記作

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u,\ \text{或}\ u_n\to u\quad(n\to\infty). \tag{3.7}$$

此收斂所表示的內容，由于距离定义的不同而有所不同，这一点必須注意。例如用(3.1)定义距离时，(3.7)表示 u_n **一致收斂**于 u，但是用(3.3)定义距离时，則表示**平方平均收斂**，两者的涵意完全不同。后者并不限定在 x 各点上 $u_n(x)\to u(x)$. 虽然如此，只要根据問題的性质采用适当的距离，对問題的研究并沒有妨碍。实际上，由于可以采用各种不同的距离定义反而方便，以后在本书很多地方将会看到这一点。

5）算子 算子是泛函分析的重要概念。例如微分运算 $\frac{d}{dx}$，古典地称为在一点 x 对 $u(x)$ 求微商 $u'(x)$ 的运算，可是在函数空間中，认为是作用于

函数空間的点 u 以产生新的点 u' 的运算。在此意义下称 $\frac{d}{dx}$ 为一个**算子**。同样可定义更复杂的算子。例如用式子

$$p(x)\frac{d^2u}{dx^2}+q(x)\frac{du}{dx}+r(x,u) \tag{3.8}$$

可由一点(函数)作出另一点(函数)。若将(3.8)所表示的函数写成 $L[u]$，则 L 就是一个算子，因而由(3.8)所得的微分方程，可表示为 $L[u]=0$ 的形式。同样，将关于两个变数 x, y 的偏微分方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+r(x,y,u)=f(x,y) \tag{3.9}$$

的左边写成算子的形式，方程可表示为

$$L[u]=f. \tag{3.10}$$

或将上式的 f 移到等号左边，然后将左边写成 $L[u]$，则得 $L[u]=0$，因为这些算子是由微分运算构成的，故称为**微分算子**。算子将函数空間的点 u 对应于另外的点 $v=L[u]$，u 和 v 不一定属于同一个函数空間。一般地，将某函数空間 U 的点 u，对应于另一函数空間 V 的点 $v=L[u]$ 的运算 L 是一个算子。U 称为 L 的**定义域空間**，V 称为**值域空間**。

算子中特别重要的是**綫性算子**，就是在綫性空間 U, V 中，使

$$L[\alpha_1u_1+\alpha_2u_2]=\alpha_1L[u_1]+\alpha_2L[u_2] \tag{3.11}$$

成立的算子 L (其中 α_1, α_2 为定数)。一般(3.8)不是綫性算子，但是若 $r(x,u)=r(x)u$，則成为綫性算子。(3.9)亦然。綫性算子之所以特别重要，是因为在許多具体問題中它能給出第一阶近似。

6) **边界算子** 单独的微分方程是很少出現的。多数情况伴随有边界条件或初始条件。例如(3.9)，在平面某区域 G 除要求满足(3.9)外，在区域 G 的边界 Γ 上，要满足边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(s)u=\varphi(s). \tag{3.12}$$

此处 n 为法綫方向，s 是边界 Γ 各点的坐标。将(3.12)写成算子的形式

$$\gamma[u]=\varphi. \tag{3.13}$$

此处的算子 γ 是由定义在 G 上的函数 $u=u(x,y)$ 的边界値，通过 $\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(s)u$ 来确定的，它对应着一个 s 的函数。即算子 γ 的定义域空間 U 是由区域 G 上定义的函数所构成的函数空間，γ 的值域空間 Φ 是定义在 Γ 上的函数所构成的函数空間，在这种意义下，称 γ 算子为**边界算子**。(3.13)不外乎是使 $\gamma[u]$ 和 Φ 中某一給出的函数 φ 一致的条件。在实际应用中对 U 和 Φ 分别导

入适当的距离，可将它們看作是距离空間。

7) **格子点函数** 所謂函数通常是把它考虑为定义在变数的連續区域上的函数，但也有不是这样的情况。如前所述，函数所述的变域，有的是区域 G，也有的是 G 的边界 Γ，另外有限或无限个孤立点的集合 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 也可以作为定义域。特别是当 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 取自然数 $1, 2, \cdots, n$ 时，函数就成为数列$\{\alpha_\nu\}$的形式了。同时也可以把它认为是 n 維的向量。

現若确定了平面区域 G 上的 n 个点 $P_1=(x_1, y_1), P_2=(x_2, y_2), \cdots, P_n=(x_n, y_n)$，考虑定义在 G 上的函数 $u=u(x, y)$ 在 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 各点处的値。$u_1=u(x_1, y_1), u_2=u(x_2, y_2), \cdots, u_n=u(x_n, y_n)$，則得到数列 $\{u_\nu\}$。如按上述的意义看作为"函数"时，则可决定 $u=u(x, y)$ 对应于 $\{u_\nu\}$ 的算子 D. D 的定义域空間是定义在 G 上的函数所构成的函数空間，D 的值域空間是由定义在 n 个点 $P_1, \cdots, P_n$ 上的函数（即数列）所构成的函数空間。对这样的函数所成的集合，必要时也可适当地定义距离，将它看成是距离空間。

应用差分法解微分方程时，一般是在平面上作格子，这格子点为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，在这些点上所考虑的函数 $\{u_\nu\}$，称为**格子点函数**。它虽然可作为原来函数 $u(x, y)$ 的代表，但是特别要注意的是它們完全属于相异的空間。

8) **边界値問題，初始値問題** 由上所述，关于微分方程的問題，一般有如下的形式：

$$L[u]=f \quad (\mathrm{I}), \qquad \gamma[u]=\varphi \quad (\mathrm{II}),$$

其中 L 为某一微分算子，γ 是边界算子。用普遍的話来說，(I)是微分方程，(II)是边界条件。初始条件可以看作是边界条件的一种，所以仍然可以表示为(II)的形式。因而条件(II)一般可由一个以上的式子組成。同样，对于微分方程組，(I)也可由一个以上的式子組成。

我們还可以将(I)，(II)写成一个方程。例如只要把定义在区域 G 的函数和定义在边界 Γ 的函数，一并看作为新的点就可以了。我們考虑到不把問題再加以抽象化，以后主要采取(I)，(II)的形式来进行研究。

另外一个想法是，只就滿足条件(II)的函数所构成的函数空間来解方程(I)。这个方法在(II)比較簡单的情况下时常使用。

如果认为将微分方程的問題写成(I)，(II)的形式，便是前进了一步，那将是錯誤的。这仅仅是出发点。可是从一般处理微分方程的情形来看，用这种記号是使問題簡洁化的第一步。近代处理微分方程的方法是在这个基础上再应用泛函分析的結果。但是正如我們开始所叙述的，使用这些記号，主要是为了使表示簡洁化，我們仍将避免使用泛函分析中較高深的定理。

第1章　展开級数的解法

§4 序　　論

本章是研究将满足所給微分方程和初始条件、边界条件的解 w，用預先选定的适当的函数列 $u_1, u_2, \cdots$ 表示成无穷級数

$$w=\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \tag{4.1}$$

的解法的有关問題。

除了从理論上必須解决当无穷級数收斂时它的和是否为所求的解的問題而外，从应用的观点来看，选擇函数列 u_k 时，必須使其容易确定展开式中的系数 c_k. 其次，由于要求采用(4.1)的有限项

$$u^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} c_k u_k \tag{4.2}$$

以計算 w 的近似值，因而級数收斂的速度是个重要的問題。此外，确定系数 c_k 时，必須求无穷阶的联立一次方程組的解，因为一般是得不出正确的解的，因此也产生了求 c_k 的近似值的問題。关于函数 u_k 的选定一般如下：

（i）满足微分方程，但是不满足初始条件和边界条件；

或者相反，即

（ii）满足初始条件和边界条件，但是不满足微分方程。

我們将在第4章研究用变分法确定系数 c_k 的情形，本章只限于討論直接从微分方程或边界条件等确定系数 c_k 的方法，并且不探討常微分方程用冪級数求解的理論。

§5 按满足微分方程的函数展开

例如热傳导問題

在 $0<x<\pi$，当 $t>0$，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5.1}$$

边界条件：

$$u(0,\ t)=u(\pi,\ t)=0, \tag{5.2}$$

初始条件：

$$u(x,\ 0)=f(x). \tag{5.3}$$

显然，

$$u_k=e^{-k^2 t}\sin kx$$

满足(5.1)和(5.2)，在此将 $u=\Sigma c_k u_k$ 代入(5.3)，得到

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx.$$

于是問題归結为求已給定的函数 $f(x)$ 的 Fourier 展开式的系数。

此外，綫性椭圓型微分方程的边界值問題

在区域 G 内，

$$L[u]=0, \tag{5.4}$$

在边界 Γ 上，

$$\gamma[u]=f(s). \tag{5.5}$$

若已求出满足 $L[u_k]=0$ 的函数 u_k，代入(5.5)中并計算其边界值

$$\gamma[u_k]=\varphi_k(s) \quad (\text{在 } \Gamma \text{ 上}), \tag{5.6}$$

如果在边界 Γ 上所給的函数 $f(s)$ 可展开为

$$f(s)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(s), \tag{5.7}$$

那么利用此展开式中的 c_k 来表示解 w 为

$$w=\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k, \tag{5.8}$$

从而問題仍是归結于求 $f(s)$ 对于 $\varphi_k(s)$ 的 Fourier 系数的問題。

若 $\varphi_k(s)$ 在 Γ 上满足正規正交条件

$$\int_\Gamma \varphi_k(s)\varphi_i(s)ds=\delta_{ki}\text{❶}, \tag{5.9}$$

---

❶ $\delta_{ki}=\begin{cases}1 & (k\neq i),\\ 0 & (k=i).\end{cases}$——譯者注

則系数 c_k 可直接由

$$c_k=\int_{\Gamma} f(s)\,\varphi_k(s)\,ds \tag{5.10}$$

来确定。可是当 $\varphi_k(s)$ 非正交时，决定系数 c_k 比較麻煩。此时可用 E. Schmidt❶ 的方法，把 $\varphi_k(s)$ 正交化，使

$$\psi_i(s)=\sum_{k=1}^{i}\alpha_{ik}\varphi_k(s) \tag{5.11}$$

为正規正交系，在确定系数 α_{ik} 后，即可用

$$\bar{u}_k=\sum_{k=1}^{i}\alpha_{ik}u_k$$

代替 u_k。

注　(5.11)的展开式可用下面的公式計算：

$$\psi_n(s)=\Delta_n'/\sqrt{\Delta_{n-1}\cdot\Delta_n},$$

此处 Δ_n 是以

$$a_{ik}=\int_{\Gamma}\varphi_i(s)\varphi_k(s)ds$$

为 (i,k) 元素的 n 阶行列式，Δ_n' 是 Δ_n 最后列元素 a_{in} 用 $\varphi_i(s)$ 代换后所得的行列式。

用下面的方法，可直接确定系数 c_k. 将 $f(s)$ 的展开式 (5.7) 的两边乘以 $\psi_i(s)$，$\psi_i(s)$是在 Γ 上的任意完备函数系，然后积分，就得到满足系数 c_k 的关系式：

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}c_k=b_i\quad(i=1,\,2,\,\cdots). \tag{5.12}$$

此处

$$a_{ik}=\int_{\Gamma}\varphi_k(s)\psi_i(s)ds,\quad b_i=\int_{\Gamma}f(s)\psi_i(s)ds. \tag{5.13}$$

一般地，这是无穷阶的联立一次方程組。

特别地，若 $\psi_i(s)$ 在 Γ 上为正規正交系，并且满足

---

❶ 可参看关肇直著：《泛函分析讲义》第118頁。　　譯者注

$$\left.\begin{aligned}&|\psi_i(s)|\leqq M/s_0,\qquad s_0=\int_\Gamma ds\quad (M\text{ 为定数}),\\&|\varphi_i(s)-\psi_i(s)|\leqq\varepsilon_i/M,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i=q<1,\end{aligned}\right\}\tag{5.14}$$

即 $\psi_i(s)$ 为一致有界，而 $\varphi_i(s)$ 和 $\psi_i(s)$ 充分接近时，对 a_{ik} 能得到下面的估計：

$$\begin{aligned}|a_{ik}|&=\left|\int_\Gamma\varphi_k(s)\psi_i(s)ds\right|\\&\leqq\left|\int_\Gamma\psi_k(s)\psi_i(s)ds\right|+\left|\int_\Gamma[\varphi_k(s)-\psi_k(s)]\psi_i(s)ds\right|\\&\leqq\frac{\varepsilon_k}{M}\cdot\frac{M}{s_0}\cdot s_0=\varepsilon_k\quad(i\neq k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|a_{ii}-1|&=\left|\int_\Gamma\varphi_i(s)\psi_i(s)ds-1\right|\\&\leqq\int_\Gamma|\varphi_i(s)-\psi_i(s)|\cdot|\psi_i(s)|ds\leqq\varepsilon_i.\end{aligned}$$

如此，令

$$a_{ik}^*=-a_{ik}\quad(i\neq k),\quad a_{ii}^*=1-a_{ii},\tag{5.15}$$

于是，无穷阶联立一次方程組(5.12)可写成标准形

$$c_i=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^*c_k+b_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots),\tag{5.16}$$

并且系数 a_{ik}^* 满足完全正則的条件(参考下节)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}^*|=|a_{ii}-1|+\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\leqq\varepsilon_i+\sum_{k\neq i}\varepsilon_k=q<1.\tag{5.17}$$

此时如下节所述，近似地解(5.16)就容易求出 c_k 的近似值。

例 1 关于矩形域上的 Dirichlet 問題。

在矩形 G 内，

$$\Delta u=0,\tag{1}$$

在 $x=0,\ a$ 上，

$$u=0,\tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{在 } y=\frac{b}{2}\text{ 上，}\quad u=\varphi_1(x),\\&\text{在 } y=-\frac{b}{2}\text{ 上，}\quad u=\varphi_2(x),\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

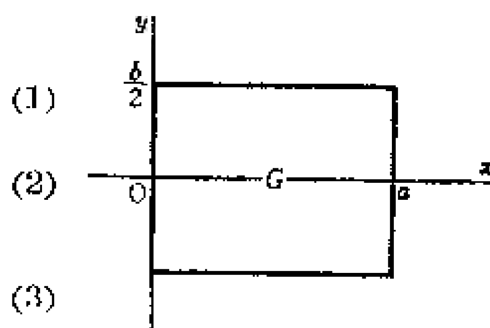


图 5.1

用級数展开法来解。

首先，求滿足(1)与(2)形式为 $u=X(x)\cdot Y(y)$ 的解。将 $u=X\cdot Y$ 代入(1)中，得

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=k. \tag{4}$$

由此可知，k 必为常数。

此处关于 X 的方程 $X''-kX=0$ 用相应于 (2) 的条件 $X(0)=X(a)=0$ 来解。同时也决定了常数 k 的可取值。

$$k=-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2,\ X(x)=C\sin\frac{n\pi}{a}x \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

对于此种 k 值，方程 $Y''+kY=0$ 的解是

$$Y(y)=C_1\cosh\frac{n\pi}{a}y+C_2\sinh\frac{n\pi}{a}y.$$

由此可知，設 A_n, B_n 为任意常数，则

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cosh\frac{n\pi}{a}y+B_n\sinh\frac{n\pi}{a}y\right]\sin\frac{n\pi}{a}x \tag{5}$$

在形式上是滿足了(1)与(2).

把(5)代入条件(3)中，则有

$$\left.\begin{aligned}u_{y=\frac{b}{2}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cosh\frac{n\pi b}{2a}+B_n\sinh\frac{n\pi b}{2a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x=\varphi_1(x),\\ u_{y=-\frac{b}{2}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cosh\frac{n\pi b}{2a}-B_n\sinh\frac{n\pi b}{2a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x=\varphi_2(x).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

将 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 在 $0\leqq x\leqq a$ 上作 sin 級数展开，就得到

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi}{a}x,\ \varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin\frac{n\pi}{a}x. \tag{7}$$

此处

$$\alpha_n=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi_1(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx,\ \ \beta_n=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi_2(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx. \tag{8}$$

比較(6)，(7)的系数，得到

$$\left.\begin{aligned}A_n\cosh\frac{n\pi b}{2a}+B_n\sinh\frac{n\pi b}{2a}&=\alpha_n,\\ A_n\cosh\frac{n\pi b}{2a}-B_n\sinh\frac{n\pi b}{2a}&=\beta_n.\end{aligned}\right\}$$

由此，即可決定系数 A_n, B_n.

例2 关于圓上的 Laplace 方程混合边界値問題。

$$\left.\begin{aligned}
&\text{在 } x^2+y^2<1 \text{ 上}, \quad \Delta u=0,\\
&u_{r=1}=f(\theta):\quad -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\\
&\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=1}=\varphi(\theta):\quad \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2},\\
&f(-\theta)=f(\theta),\quad \varphi(\pi+\theta)=\varphi(\pi-\theta),
\end{aligned}\right\}$$

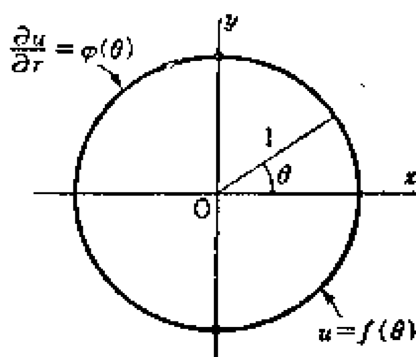


图 5.2

用下面形式的无穷级数求解:

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}c_k r^k\cos k\theta \tag{1}$$

(它在形式上满足方程 $\Delta u=0$).

一般如取 $\psi_i(\theta)$ 是在区間 $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ 及 $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{2}$ 上的完备正交系 $\{\cos 2i\theta\}$, 则从边界条件决定系数 c_k 的方程为

$$\alpha_{2i}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)\cos 2i\theta\,d\theta,\quad \beta_{2i}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\varphi(\theta)\cos 2i\theta\,d\theta,$$

亦即

$$\left.\begin{aligned}
&\pi c_0+\frac{2\cdot1}{1\cdot1}c_1-\frac{2\cdot3}{3\cdot3}c_3+\frac{2\cdot5}{5\cdot5}c_5-\cdots=\alpha_0,\\
&\frac{\pi}{2}c_2-\frac{2\cdot1}{-1\cdot3}c_1+\frac{2\cdot3}{1\cdot5}c_3-\frac{2\cdot5}{3\cdot7}c_5+\cdots=\alpha_2,\\
&\frac{\pi}{2}c_4+\frac{2\cdot1}{-3\cdot5}c_1-\frac{2\cdot3}{-1\cdot7}c_3+\frac{2\cdot5}{1\cdot9}c_5-\cdots=\alpha_4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{2\cdot1^2}{1\cdot1}c_1+\frac{2\cdot3^2}{3\cdot3}c_3-\frac{2\cdot5^2}{5\cdot5}c_5+\cdots=\beta_0,\\
&2\cdot\frac{\pi}{2}c_2+\frac{2\cdot1^2}{-1\cdot3}c_1-\frac{2\cdot3^2}{1\cdot5}c_3+\frac{2\cdot5^2}{3\cdot7}c_5-\cdots=\beta_2,\\
&4\frac{\pi}{2}c_4-\frac{2\cdot1^2}{-3\cdot5}c_1+\frac{2\cdot3^2}{-1\cdot7}c_3-\frac{2\cdot5^2}{1\cdot9}c_5+\cdots=\beta_4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

从(a), (b)消去未知数 $c_2, c_4, \cdots$, 将未知数用

$$x_{2k-1}=(-1)^k(2k-1)c_{2k-1}\quad (k=1, 2, \cdots)$$

代替,则得

$$\left.\begin{aligned}
&x_1+\frac{x_3}{3}+\frac{x_5}{5}+\frac{x_7}{7}+\cdots=\frac{\beta_0}{2},\\
&-\left[\frac{x_1}{-1}+\frac{x_3}{1}+\frac{x_5}{3}+\frac{x_7}{5}+\cdots\right]=\frac{\beta_2}{2}-\alpha_2,\\
&\frac{x_1}{-3}+\frac{x_3}{-1}+\frac{x_5}{1}+\frac{x_7}{3}+\cdots=\frac{\beta_4}{2}-2\alpha_4,\\
&-\left[\frac{x_1}{-5}+\frac{x_3}{-3}+\frac{x_5}{-1}+\frac{x_7}{1}+\cdots\right]=\frac{\beta_6}{2}-3\alpha_6,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

再作(c)的第一式和第二式的算术平均，第二式和第三式的算术平均，……，結果得

$$\left.\begin{aligned}
&x_1=\frac{x_3}{1\cdot3}+\frac{x_5}{3\cdot5}+\frac{x_7}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{4}(\beta_0+\beta_2-2\alpha_2),\\
&x_3=\frac{x_1}{1\cdot3}+\frac{x_5}{1\cdot3}+\frac{x_7}{3\cdot5}+\cdots-\frac{1}{4}(\beta_2+\beta_4-2\alpha_2-4\alpha_4),\\
&x_5=\frac{x_1}{3\cdot5}+\frac{x_3}{1\cdot3}+\frac{x_7}{1\cdot3}+\cdots+\frac{1}{4}(\beta_4+\beta_6-4\alpha_4-6\alpha_6),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}$$

必須注意，这里満足(d)的 x_k 不一定滿足(c)。

关于近似地解方程(d)的問題，在下节中再进行研究。在此只須注意，若 $f(\theta)$，$\varphi(\theta)$ 十分光滑，其 Fourier 系数 α_{2n}，β_{2n} 是滿足

$$\alpha_{2n}=O(n^{-\frac{5}{2}}), \quad \beta_{2n}=O(n^{-\frac{3}{2}})$$

的无穷小，则(d)的解也滿足(c)，由是可以确定系数 c_k 而給出(1)是方程的正确解。

§6 无穷阶联立一次方程組的理論

如前节所述，在决定展开式的系数 c_k 时，常常产生解无穷阶联立一次方程組的問題。在此概括地說明一下其理論之要点。因为篇幅所限，只举出实用上的必要定理，而不給出証明。

通过簡单的移項，可把无穷阶联立一次方程組写成标准形式

$$x_i=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}x_k+b_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots), \tag{6.1}$$

对此設

$$\rho_i=1-\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|, \tag{6.2}$$

則上述方程組(6.1)

当 $\rho_i>0$ 时，称为**正則**的，

当 $\rho_i\geqq\theta>0$ (θ 为定数)时，称为**完全正則**的。

定理 1　正則方程(6.1)，当 $|b_i|\leqq K\rho_i$ (K 为常数)时，至少有一个有界的解，$|x_i|\leqq K$. 此时若用

$$x_i^{(n+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}x_k^{(n)}+b_i,\quad x_i^{(0)}=0 \tag{6.3}$$

作逐次近似列 $x_i^{(n)}$，于是当 $n\to\infty$ 时，$x_i^{(n)}$ 收斂于解 x_i^*.

从 $x_i^{(0)}=0$ 用逐次近似法所得的解 x_i^*，称为(6.1)的**基本解**。

系　若(6.1)为完全正則的，并且 $|b_i|\leqq K'$ (常数)，則有适合 $|x_i|\leqq K'/\theta$ 的解。

定理 2　設(6.1)为正則方程組，若

$$X_i=\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|X_k+K\rho_i\quad (K\text{ 为常数}) \tag{6.4}$$

的基本解 X_i^*，滿足条件 $X_i^*\geqq\alpha>0$ (α 为常数)，且 $|b_i|\leqq K\rho_i$，則有界的解 x_i 是唯一确定的，这样，从任意的初始值 $x_i^{(0)}$ 所得的逐次近似列 $x_i^{(n)}$ 都收斂于这个解。

系　对于完全正則方程，由于成立着条件 $X_i^*\geqq K\theta>0$，所以有界的解是唯一的。

定理 3　正則方程具有 $\lim x_i=0$ 的解不能多于一个。

定理 4　对于正則方程，如果 $|b_i|\leqq K\rho_i$，則联立一次方程組(有限个)

$$x_i=\sum_{k=1}^{N}a_{ik}x_k+b_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{6.5}$$

的解 $x_i^{(N)}$，当 $N\to\infty$ 时，收斂于基本解 x_i^*.

定理 5　对于正則方程，如果 $a_{ik}\geqq0$, $K\rho_i\geqq b_i\geqq0$，則对于基本解 x_i^*，有下面的估計：

$$x_i^{(N)}\leqq x_i^*\leqq\tilde{x}_i^{(N)}, \tag{6.6}$$

此处，$x_i^{(N)}$ 是(6.5)的解，$\tilde{x}_i^{(N)}$ 是方程組(有限个)

$$x_i=\sum_{k=1}^{N}a_{ik}x_k+b_i+K\sum_{k=N+1}^{\infty}a_{ik}\tag{6.7}$$

的解。又若(6.7)有界的解是唯一的，則 $\tilde{x}_i^{(N)}$，当 $N\to\infty$ 时也收斂于 x_i^*.

例　考慮相当于上节例2中(d)的方程

$$\left.\begin{aligned}x_1&=0\,x_1+\frac{1}{1\cdot3}x_2+\frac{1}{3\cdot5}x_3+\frac{1}{5\cdot7}x_4+\cdots+b_1,\\x_2&=\frac{1}{1\cdot3}x_1+0\,x_2+\frac{1}{1\cdot3}x_3+\frac{1}{3\cdot5}x_4+\cdots+b_2,\\x_3&=\frac{1}{3\cdot5}x_1+\frac{1}{1\cdot3}x_2+0\,x_3+\frac{1}{1\cdot3}x_4+\cdots+b_3,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$

对于此方程

$$\rho_i=1-\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}=\frac{1}{4i-2},$$

由于 $\rho_i>0$，所以是正則的，可是不存在使 $\rho_i\geqq\theta>0$ 的 θ，因而不是完全正則的。但是它滿足定理2的条件，即令 $b_i=\rho_i$ 时得出相当于(6.4)的方程，用归納法可以証明，从 $X_i^{(0)}=0$ 出发的逐次近似列 $X_i^{(n)}$，滿足

$$X_i^{(n)}\geqq\frac{n}{4i-4+2n},$$

因此

$$X_i^*=\lim_{n\to\infty}X_i^{(n)}\geqq\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4i-4+2n}=\frac{1}{2}.$$

从而，如果 $b_n=O(n^{-1})$，則有界的解是唯一的。用逐次近似或定理4的方法，可求其近似值，又从定理5也可得出解的估計。

§7　按滿足边界条件的函数展开

綫性椭圓型微分方程的边界值問題

在平面区域 G 内，

$$L[u]=f,\tag{7.1}$$

在边界 Γ 上，

$$\gamma[u]=0,\tag{7.2}$$

若在边界 Γ 上能得出满足 $\gamma[u_{ik}]=0$ 的函数列 u_{ik}，計算

$$L[u_{ik}]=v_{ik}. \tag{7.3}$$

再若在区域 G 内能将 $f(x, y)$ 展开为二重級数

$$f(x, y)=\sum_{i,k=1}^{\infty} c_{ik}v_{ik}(x, y), \tag{7.4}$$

則解 w 在形式上为

$$w=\sum_{i,k=1}^{\infty} c_{ik}u_{ik}(x, y). \tag{7.5}$$

至于选择函数 $u_{ik}(x, y)$ 的方法，以用对同一区域的固有值問題

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在区域 } G \text{ 内，} & L[u]=\lambda u,\\ \text{在边界 } \Gamma \text{ 上，} & \gamma[u]=0\end{array}\right\} \tag{7.6}$$

的固有函数系最为合适，因为它們一般地在区域 G 内成完备正交系，所以用起来很方便。

此时，以 λ_{ik} 为固有值，則

$$v_{ik}(x, y)=L[u_{ik}]=\lambda_{ik}u_{ik}(x, y).$$

所以当

$$f(x, y)=\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}u_{ik}(x, y) \tag{7.7}$$

时，解 w 由下面的級数給出：

$$w=\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{a_{ik}}{\lambda_{ik}} u_{ik}(x, y). \tag{7.8}$$

例 对于截面为矩形的柱的弯曲問題。

G 为矩形 $0<x<a$, $0<y<b$, Γ 为其周界，考虑解

$$\text{在 } G \text{ 内 } -\Delta u=2, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上 } \quad u=0. \tag{1}$$

固有值問題

$$\text{在 } G \text{ 内 } -\Delta u=\lambda u, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上 } \quad u=0$$

的固有函数 u_{mn}，固有值 λ_{mn} 分别为

$$u_{mn}=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad \lambda_{mn}=\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2.$$

在此将 $f(x, y)=2$ 用 u_{mn} 展开，則有

$$2=\sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{2}$$

对方程(2)的两边乘以 u_{mn}，在 G 内积分，就可定出 c_{mn}，

$$2\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}dx\cdot\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}dy=c_{mn}\int_0^a \sin^2\frac{m\pi x}{a}dx\cdot\int_0^b \sin^2\frac{n\pi y}{b}dy,$$

即

$$c_{mn}=\begin{cases}\dfrac{32}{mn\pi^2} & (m,\ n\ 同为奇数),\\ 0 & (m,\ n\ 同为奇数之外).\end{cases}$$

于是由(7.8)可得出下面的解：

$$w=\frac{32}{\pi^4}\sum_{m,n=1,3\cdots}\frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}}{mn\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)}.$$

由于这个二重級数收斂很快，故适于数值計算。

§8 用局部适合法决定展开系数

在展开的級数 $w=\Sigma c_k u_k$ 中，如果不要求系数 c_k 完全滿足微分方程和边界条件，只要求它們在区域的或周界的某些点上，滿足所給的条件，这种确定系数的方法叫作**局部适合法**(Kollokation)。

例 有关截面是正方形的柱的热傳导問題。

設正方形 G 为 $|x|<1$, $|y|<1$, 它的周界为 Γ. 現在考慮近似的解。

$$在\ G\ 内,\ \Delta u=-1,\ 在\ \Gamma\ 上,\ u+\frac{\partial u}{\partial n}=0. \tag{1}$$

考慮其对称性，很容易看出，

$$\begin{aligned}u&=-\frac{1}{4}(x^2+y^2)+\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,\mathrm{Re}\,(x+iy)^{4k}\\&=-\frac{1}{4}(x^2+y^2)+c_0+c_1(x^4-6x^2y^2+y^4)+\cdots\end{aligned} \tag{2}$$

滿足 $\Delta u=-1$, 取到第三項，对边界用局部适合法决定系数 c_0, c_1.

对于函数(2)，由于

$$\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=1}=-\frac{3+y^2}{4}+c_0+c_1(5-18y^2+y^4)+\cdots, \tag{3}$$

所以取到第三項，使其在 $y=\dfrac{1}{4}$ 和 $y=\dfrac{3}{4}$ 处滿足边界条件，則有

$$c_0+c_1\frac{993}{256}=\frac{49}{64},\quad c_0-c_1\frac{1231}{256}=\frac{57}{64}.$$

故

$$c_0=u(0,0)=0.8214,\quad c_1=-0.0144.$$

$u(0,0)$ 的准确值是

$$u(0,0)=0.82156\cdots.$$

所以近似程度是比較好的。又此时由于对称性，如图 8.1，共在 16 个点处满足边界条件。

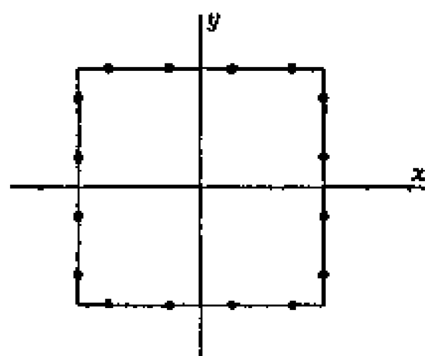


图 8.1

§9 級数收斂性的改进

在各种問題的近似解法中，常常出現收斂极为緩慢的級数，这种級数是沒有实用价値的。出現这种收斂性的原因，通常是由于所給問題的解析性的奇异(singularity)所引起的。所以改进收斂性的一般方法，就是去掉这种奇异。

1) **改进 Fourier 級数收斂的方法 I** 設 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，并且直到第 $(k-1)$ 阶的导数連續，第 k 阶导数有有界变差，那末它的 Fourier 級数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的 Fourier 系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

以 $n^{-(k+1)}$ 級收斂于零。若从所給函数抽出不連續的部分，并且尽量使上面条件成立的 k 値增大，則可展开为收斂快的 Fourier 級数。

首先，作下列具有簡单不連續性的函数列 $\sigma_0(x)$, $\sigma_1(x)$, $\cdots$.

$$(\text{i})\quad \sigma_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2} & (-\pi\leqq x<0),\\ \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2} & (0<x\leqq\pi),\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

这些函数，在$[-\pi, \pi]$中除点$x=0$外都是連續的，在$x=0$处发生了振幅为π的"跳跃"

$$\sigma_0(+0)-\sigma_0(-0)=\pi.$$

(ii) $$\sigma_1(x)=\int_0^x \sigma_0(x)dx-\frac{\pi^2}{6}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{(\pi+x)^2}{4} & (-\pi\leqq x\leqq 0),\\ \dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{(\pi-x)^2}{4} & (0\leqq x\leqq \pi).\end{cases}$$

这个函数的导数$\sigma_1'(x)$除去点$x=0$外都是連續的，在$x=0$处的跳跃为π，

$$\sigma_1'(+0)-\sigma_1'(-0)=\pi.$$

(iii) $$\sigma_2(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\frac{3\pi x^2-2\pi^2 x-x^3}{12}\quad(-\pi\leqq x\leqq\pi).$$

对此函数

$$\sigma_2''(+0)-\sigma_2''(-0)=\pi.$$

以下仿此，可同样定义$\sigma_s(x)$.

其次，設函数$f(x)$是周期为2π的周期函数，在区間$[-\pi, \pi]$中除了有限个例外点外，有有界的第k阶导数，$f(x)$本身及其导数除去有限个点外都連續。且其不連續性是由于跳跃而产生的。

再設第$(k+1)$阶导数有有界变差，此时以$x_s^{(0)}(s=1, 2, \cdots, m_0)$为函数$f(x)$的不連續点，在这些点的跳跃分别为

$$h_s=f(x_s^{(0)}+0)-f(x_s^{(0)}-0),$$

并且用

$$h_s^{(j)}=f^{(j)}(x_s^{(j)}+0)-f^{(j)}(x_s^{(j)}-0)\quad\begin{pmatrix}s=1, 2, \cdots, m_j\\ j=1, 2, \cdots, k\end{pmatrix}$$

表示第j阶导数的跳跃。这样，函数$f(x)$可写成下面形式：

$$f(x)=\sum_{s=1}^{m_0}\frac{1}{\pi}h_s\sigma_0(x-x_s^{(0)})+\sum_{s=1}^{m_1}\frac{1}{\pi}h_s^{(1)}\sigma_1(x-x_s^{(1)})+\cdots$$

$$+\sum_{s=1}^{m_k}\frac{1}{\pi}h_s^{(k)}\sigma_k(x-x_s^{(k)})+\varphi(x).$$

其中的 $\varphi(x)$，显然一直到第 k 阶导数都連續，第 $(k+1)$ 阶导数有有界变差，从而 $\varphi(x)$ 的 Fourier 系数是 $n^{-(k+2)}$ 級的无穷小。

再用函数列 $\sigma_s(x)$，可将所給的 Fourier 級数变为收斂較快的級数。

例 $f(x)$ 用下面級数表示：

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin nx \quad (0\leqq x\leqq\pi).$$

在此利用关系式

$$\frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5-n^3}$$

代入級数，将函数分成三个部分，最初的两个，可如下面的式子求和：

$$\begin{aligned}S_1(x)&=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx}{n}\\&=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n}\\&=-\frac{1}{\pi}\left[\sigma_0\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_0\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_2(x)&=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\cos nx}{n^3}\\&=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n^3}\\&=\frac{1}{\pi}\left[\sigma_2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

这样，$f(x)$ 可以表示为

$$f(x)=S_1(x)+S_2(x)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^3(n^2-1)}\sin nx.$$

最后的級数，因为收斂得快，所以不但可以用来計算 $f(x)$ 自身，而且也可以計算它的导数的值。

假若函数或其导数不是有界的，把这种方法用于函数的展开时，前面的 $\sigma_s(x)$ 将不够用了，这时要用

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n(n-1)}=(1-\cos x)\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\sin x+\cos x.$$

2) 改进 Fourier 級数的收斂方法 II　設 $f(x)$ 是定义在区間 $[0,\pi]$ 上的函数，并且有直到第 $(k-1)$ 阶的連續导数，第 k 阶导数有有界变差。利用规定的关系 $f(x+\pi)=f(x)$，可以把它延拓到全区間上成为周期为 π 的周期函数，从而可用 $\cos 2nx$，$\sin 2nx$ 展开为 Fourier 級数。另外，若规定 $f(-x)=f(x)$，$f(x+2\pi)=f(x)$，則它成为周期为 2π 的偶函数，这时只用 $\cos nx$ 就可以展开。同样也可以作为周期为 2π 的奇函数来展开。

但是，这种用普遍方法展开的 Fourier 系数，一般不是 $n^{-(k+1)}$ 級的，这是由于将 $f(x)$ 延拓到全区間的周期函数时，在連接处，不論函数或是其导数，都有产生跳跃的可能性。

在此，作 $(2k-1)$ 次多项式 $\varphi(x)$，使具有下面的性质：

$$\left.\begin{array}{ll}\varphi(0)=f(0), & \varphi(-\pi)=f(\pi),\\ \varphi'(0)=f'(0), & \varphi'(-\pi)=f'(\pi),\\ \cdots\cdots, & \cdots\cdots,\\ \varphi^{(k-1)}(0)=f^{(k-1)}(0), & \varphi^{(k-1)}(-\pi)=f^{(k-1)}(\pi).\end{array}\right\}$$

然后定义函数 $\psi(x)$ 如下：

$$\psi(x)=\begin{cases}f(x) & (0\leqq x\leqq\pi),\\ \varphi(x) & (-\pi\leqq x\leqq 0),\end{cases}\qquad \psi(x+2\pi)=\psi(x),$$

則 $\psi(x)$ 是有全区間上直到第 $(k-1)$ 阶的連續导数，第 k 阶导数有有界变差，并且是周期为 2π 的周期函数，所以用 $\sin nx$，$\cos nx$ 展

开时，它的 Fourier 系数以 $n^{-(k+1)}$ 級收斂于零。这个 Fourier 級数在区間 $[0, \pi]$ 上所表示的正是函数 $f(x)$.

为了确定多項式 $\varphi(x)$，比較方便的方法是将它变成下面的形式，然后再确定系数，

$$\varphi(x)=(x+\pi)^k\left[A_0+A_1x+\cdots+\frac{A_{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1}\right]$$
$$+x^k\left[B_0+B_1(x+\pi)+\cdots+\frac{B_{k-1}}{(k-1)!}(x+\pi)^{k-1}\right].$$

例 将下面函数展开为收斂較快的 Fourier 級数：

$$f(x)=x-\frac{\pi}{2}\quad(0\leqq x\leqq\pi).$$

如果要求系数为 $\frac{1}{n^4}$ 的級，那末取 $k=3$ 就够了。多項式 $\varphi(x)$ 可用上面的形式来求，确定系数的式子是：

$$\begin{cases}-\frac{\pi}{2}=\pi^3A_0, & \frac{\pi}{2}=-\pi^3B_0,\\ 1=\pi^3A_1+3\pi^2A_0, & 1=-\pi^3B_1+3\pi^2B_0,\\ 0=\pi^3A_2+6\pi^2A_1+6\pi A_0, & 0=-\pi^3B_2+6\pi^2B_1-6\pi B_0.\end{cases}$$

解之，得到

$$A_0=-\frac{1}{2\pi^2},\quad A_1=\frac{5}{2\pi^3},\quad A_2=-\frac{12}{\pi^4},$$
$$B_0=-\frac{1}{2\pi^2},\quad B_1=-\frac{5}{2\pi^3},\quad B_2=-\frac{12}{\pi^4}.$$

从而

$$\varphi(x)=(x+\pi)^3\left(-\frac{1}{2\pi^2}+\frac{5}{2\pi^3}x-\frac{6}{\pi^4}x^2\right)$$
$$+x^3\left[-\frac{1}{2\pi^2}-\frac{5}{2\pi^3}(x+\pi)-\frac{6}{\pi^4}(x+\pi)^2\right].$$

用此展开的 Fourier 級数，在区間 $[0, \pi]$ 上是

$$\psi(x)=f(x)=\frac{240}{\pi^3}\sum_{n=1,3,\cdots}\left(\frac{1}{n^4}-\frac{1}{\pi^2n^6}\right)\cos nx+\frac{1440}{\pi^4}\sum_{n=2,4,\cdots}\frac{1}{n^5}\sin nx.$$

3) 对于边界值問題的应用 考虑椭圓型綫性微分方程的边界值問題。

在区域 G 内,

$$L[u]=0,$$

在边界 Γ 上,

$$u=f(s).$$

根据§6用級数可以如下来解。

設 $u_k(x, y)$ 为满足 $L[u_k]=0$ 的函数, 計算其边界上的值, 得出 Γ 上的函数 $\varphi_k(s)$, 用 $\varphi_k(s)$ 展开所給的函数 $f(s)$, 則有

$$f(s)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(s).$$

所以解 w 是如下的无穷級数:

$$w=\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x, y).$$

若 $f(s)$ 有奇异, 一般地展开式的收斂性不佳, 从而解的級数也迟不收斂。但是,作如下处理,可以表示为收斂性較佳的級数。

設函数 $f_0(s)$ 是与所給函数 $f(s)$ 有同一奇异的簡单函数, 求满足

在区域 G 内,

$$L[u_0]=0,$$

在边界 Γ 上,

$$u_0=f_0(s)$$

的函数 $u_0(x, y)$. 若能得到这个函数,用置换未知函数

$$u_1(x, y)=u(x, y)-u_0(x, y),$$

再解問題

在区域 G 内,

$$L[u_1]=0,$$

在边界 Γ 上,

$$u_1=f_1(s)\equiv f(s)-f_0(s)$$

就可以了。由假定, 函数 $f_1(s)$ 沒有奇异, 所以用級数求 $u_1(x, y)$ 就能很快的收斂。

函数 $u_0(x, y)$ 一般地可如下来求。

例如 $f(s)$ 在 $s=s_1$ 的点 M_1 处有 σ 跳跃

$$f(s_1+0)-f(s_1-0)=\sigma.$$

此时，考虑有下面性质的形状簡单的区域 G_0. G_0 含 G 于其内部，并且它的周界 Γ_0 在 M_1 的近傍和 Γ 的周界一致（就是說，Γ 在 M_1 处的切綫仅在 Γ_0 的点 M_1 处与 Γ 相切）。

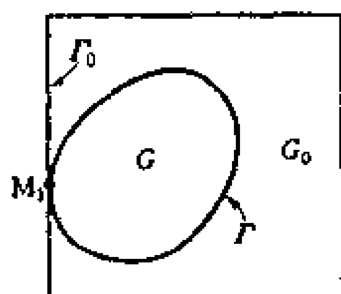


图 9.1

对这个区域 G_0，以尽可能簡单，而且在 M_1 处有 σ 跳跃的边界值来解 $L[u]=0$. 以此解为 $u_0(x, y)$，则在 M_1 处的跳跃就被抽掉了。

特别是，当 $L[u]=\Delta u$ 时，除去一点外到处正則，并且在例外点，很容易观察得出具有必要的奇异的解。設周界 Γ 在点 M_1 处有切綫，在 M_1 点的近傍 Γ 落在切綫的一側，取点 M_1 为坐标原点，并取切綫为 y 軸，x 軸的正向取 G 所在的一側。此时函数

$$U_0(x, y)=\frac{\sigma}{\pi}\operatorname{Im}\log(x+iy)=\frac{\sigma}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

是在原点以外到处正則的調和函数。当 $P(x, y)$ 沿着 Γ 趋于 M_1 时，由于

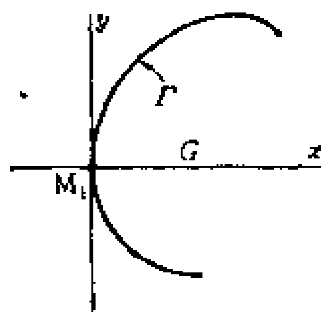


图 9.2

$$\lim_{P\uparrow M_1}\frac{\sigma}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{\sigma}{\pi}\tan^{-1}(-\infty)=-\frac{\sigma}{2},$$

$$\lim_{P\downarrow M_1}\frac{\sigma}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{\sigma}{\pi}\tan^{-1}(+\infty)=\frac{\sigma}{2},$$

所以 $U_0(x, y)$ 在 Γ 上于 M_1 处有跳跃 σ.

同样，对于导数具有 σ^* 跳跃的函数，可采用

$$U_0^*(x, y)=-\frac{\sigma^*}{\pi}\operatorname{Re}\{(x+iy)[\log(x+iy)-1]\}$$

$$=-\frac{\sigma^*}{\pi}\left[x(\log\sqrt{x^2+y^2}-1)-y\tan^{-1}\frac{y}{x}\right].$$

第2章 积分方程的近似解法

§10 序 論

本章主要研究与积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=f(x)$$

的近似解法有关問題。(在此 $\varphi(x)$ 是未知函数，$K(x, y)$ 是称为积分核的已知函数，$f(x)$ 也是已知函数，λ 是参数。)

解常微分方程的問題，常常可以归結为使用适当的核 $K(x, y)$，来解上面形式的积分方程問題。

积分方程的問題，一般分为下面两种类型：

(i) 对于所給的参数 λ 和任意的函数 $f(x)$，求解 $\varphi(x)$.

(ii) 对于 $f(x)=0$，找出有不使解 $\varphi(x)\equiv 0$ 的 λ 値(固有値)，及其相对应的解 $\varphi(x)$(固有函数)。

一般第二类問題較第一类問題难，特别是对于对称核的情形，如知道了第二类問題的所有固有値以及固有函数，根据积分方程的理論，至少在形式上能求出第一类問題的解。

注 上面的积分方程为 Fredholm 第二种积分方程，因为沒有假定核 $K(x, y)$ 是对称的，所以当 $x\leqq y$ 时 $K(x, y)=0$ 的特别情形，含有 Volterra 积分方程。所以下面所述的近似解法，大多数也适用于 Volterra 积分方程。

§11 由求积公式化为代数方程的解法

1) 方法 我們使用下面形式的定积分近似值公式：

$$\int_a^b \psi(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n} A_k\psi(x_k)+\rho, \tag{11.1}$$

其中 A_k, x_k 是由 a, b, n 确定的常数，ρ 是誤差。

例如，用梯形公式

$$x_k=a+\frac{b-a}{n-1}(k-1),$$

$$2A_1=2A_n=A_2=A_3=\cdots=A_{n-1}=\frac{b-a}{n-1},$$

或是更精确的公式，如 Tschebyscheff 公式，Gauss 公式等，可参考《应用数学便览》(丸善著) ❶。

将公式(11.1)应用于所給积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ y)\varphi(y)dy=f(x), \tag{11.2}$$

以代换左边的定积分，就得到等式：

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{k=1}^{n}A_kK(x,\ x_k)\varphi(x_k)=f(x)+\lambda\rho(x). \tag{11.3}$$

在此，特别当 $x=x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 时，得到了 $\varphi(x_i)$ 所满足的方程：

$$\varphi(x_i)-\lambda\sum_{k=1}^{n}A_kK(x_i,\ x_k)\varphi(x_k)=f(x_i)+\lambda\rho(x_i)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{11.4}$$

在此式中，$\rho(x_i)$ 的值不能精确地知道，但它总是較小的，我們可以忽略它，便得出一次方程

$$\tilde{\varphi}(x_i)-\lambda\sum_{k=1}^{n}A_kK(x_i,\ x_k)\tilde{\varphi}(x_k)=f(x_i). \tag{11.5}$$

此方程的解 $\tilde{\varphi}(x_i)$，可以认为是(11.2)的解在 x_i 处的值 $\varphi(x_i)$ 的近似值。

对于分点 x_i 以外的 x 的近似值，对应于(11.3)，可得如下：

$$\tilde{\varphi}(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}A_kK(x,\ x_k)\tilde{\varphi}(x_k). \tag{11.6}$$

若近似的解固有值問題时，可考察与(11.5)对应的齐次方程。令其系数所作的行列式为 0，則得到

$$\Delta(\lambda)=|\delta_{ik}-\lambda A_kK(x_i,\ x_k)|=0. \tag{11.7}$$

---

❶ 亦可参看胡祖熾《計算方法》，高教出版社，1959，第六章。——校者注

解出后就得到了固有値的近似値。在此必須注意，即使核是对称核，(11.7)的行列式一般来說不是对称行列式。

2) **誤差的估計**　求积公式(11.1)的誤差ρ，一般由下式給出：

$$|\rho| \leqq k_n \cdot \max_{a \leqq x \leqq b} |\psi^{(s)}(x)|. \tag{11.8}$$

如梯形公式

$$k_n = \frac{(b-a)^3}{12(n-1)^2}, \quad s=2,$$

即

$$|\rho| \leqq \frac{(b-a)^3}{12(n-1)^2} \max |\psi''(x)|.$$

在此，若能找出滿足

$$\left| \frac{d^s}{dy^s} [K(x, y) \varphi(y)] \right| \leqq T^{(s)} \tag{11.9}$$

的常数$T^{(s)}$，则将正确公式(11.4)变成近似公式(11.5)时的誤差$\rho(x_i)$，可估計为

$$|\rho(x_i)| \leqq k_n T^{(s)}. \tag{11.10}$$

知道了$\rho(x_i)$的估計后，再分析一次方程系数的誤差对解的影响，就可計算$\tilde{\varphi}(x_i)$的誤差。

由于$\varphi(x)$是未知的，所以要找出正确的$T^{(s)}$值很不容易，可是在实际应用中，用近似值$\tilde{\varphi}(x_i)$可推出$T^{(s)}$的值。严格地說，只用已知的量也可以估計出誤差$|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|$，在这里省略了理論的叙述，只举出一些結果。

設$N^{(s)}$，$M_x^{(s)}$，$M_y^{(s)}$分別是

$$\left| \frac{d^s}{dx^s} f(x) \right|, \quad \left| \frac{d^s}{dx^s} K(x, y) \right|, \quad \left| \frac{d^s}{dy^s} K(x, y) \right|$$

的上界，$N^{(0)}$，$M^{(0)}$是$|f(x)|$，$|K(x, y)|$的上界。又B是滿足下面式子的常数：

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta_{ik}|/|\Delta(\lambda)|\leq B,$$

其中 $\Delta(\lambda)$ 是(11.7)中的行列式，Δ_{ik} 是它的余因子。

此时，对于(11.6)所給出的近似解 $\tilde{\varphi}(x)$ 的誤差，有下面的估計式成立：

$$|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|\leq k_n|\lambda|\{M^{(0)}|\lambda|B(b-a)+1\}(P_s+Q_sH^{(0)}). \tag{11.11}$$

但是，

$$P_s=N^{(0)}M_y^{(s)}+{}_sC_1N^{(1)}M_y^{(s-1)}+\cdots+N^{(s)}M^{(0)},$$

$$Q_s=|\lambda|(b-a)(M^{(0)}M_y^{(s)}+{}_sC_1M_x^{(1)}M_y^{(s-1)}+\cdots+M_x^{(s)}M^{(0)})$$

($_sC_r$ 是二項式系数)，

$H^{(0)}$ 是解 $\varphi(x)$ 的絕对値 $|\varphi(x)|$ 的上限，估計值如下：

$$H^{(0)}\leq\frac{S+k_n|\lambda|\{M^{(0)}|\lambda|B(b-a)+1\}P_s}{1-k_n|\lambda|\{M^{(0)}|\lambda|B(b-a)+1\}Q_s}, \tag{11.12}$$

在此，S 是 $|\tilde{\varphi}(x)|$ 的上界(即 $|\tilde{\varphi}(x)|\leq S$)。另外，以上公式中的 k_n 都是(11.8)定义的系数。

3) **核有奇异性时的处理方法** 在应用上，核 $K(x, y)$ 或者其导数 $K_y(x, y)$ 当 $x=y$ 时常常是不連續的，此时先将(11.2)写为

$$\varphi(x)\left[1-\lambda\int_a^b K(x, y)dy\right]$$

$$-\lambda\int_a^b K(x, y)[\varphi(y)-\varphi(x)]dy=f(x). \tag{11.13}$$

上式左边第二項的被积函数，在 $x=y$ 时会有 $[\varphi(y)-\varphi(x)]$ 为0的因子，所以它的奇异性应該比 $K(x, y)\varphi(y)$ 的奇异性低，从而由求积分公式近似积分时所产生的誤差也較小。另外，在左边第一项的积分中，不含有未知函数，故比較容易积分。

这样，从(11.13)作一次方程

$$\tilde{\varphi}(x_i)[1-\lambda\chi(x_i)]-\lambda\sum_{k=1}^{n}A_kK(x_i, x_k)[\tilde{\varphi}(x_k)-\tilde{\varphi}(x_i)]=f(x_i)$$

其中

$$\chi(x)=\int_a^b K(x,\ y)dy \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \qquad (11.14)$$

这个方程的解，比(11.5)的解能给出更好的近似。

例1 用 Gauss 求积公式求积分方程

$$\varphi(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{xy}\varphi(y)\,dy=1-\frac{1}{2x}(e^x-1) \qquad (1)$$

的近似解。

在(11.1)中令 $n=2$,

$$A_1=A_2=0.5; \quad x_1=0.2113, \quad x_2=7887.$$

从而一次方程(11.5)是

$$\begin{cases} 0.7386\tilde{\varphi}(x_1)-0.2954\tilde{\varphi}(x_2)=0.4434, \\ -0.2954\tilde{\varphi}(x_1)+0.5343\tilde{\varphi}(x_2)=0.2384, \end{cases}$$

所以

$$\tilde{\varphi}(x_1)=0.9997, \quad \tilde{\varphi}(x_2)=0.9990.$$

从(11.6)得出下面的近似解：

$$\tilde{\varphi}(x)=\frac{1}{4}(0.9997e^{0.2113x}+0.9990e^{0.7887x})+1-\frac{1}{2x}(e^x-1). \qquad (2)$$

用(11.11), (11.12)估計誤差为

$$|\varphi(x)|\leqq H^{(0)}\leqq 1.48, \quad |\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|\leqq 0.07.$$

由于正确的解是 $\varphi(x)=1$, $\tilde{\varphi}(x)$的誤差是 0.001 左右，所以从这个估計式，可以直接看出正誤差的大小。

例2 考察固有值問題：

$$y^{\mathrm{IV}}=\lambda(1+x)y, \quad y(0)=y'(0)=y''(1)=y'''(1)=0 \qquad (1)$$

(一端固定，截面不同的細棒振动).

微分方程的 Green 函数 $G(x,\ \xi)$是

$$G(x,\ \xi)=\begin{cases} x^2(3\xi-x)/6 & (x\leqq\xi), \\ \xi^2(3x-\xi)/6 & (x\geqq\xi). \end{cases}$$

从而，解(1)的問題归結为解下面积分方程的問題：

$$y(x)=\lambda\int_0^1 K(x,\ \xi)y(\xi)d\xi, \quad K(x,\ \xi)=G(x,\ \xi)(1+\xi). \qquad (2)$$

在(11.1)中，当 $n=3$ 时，使用 Simpson 公式，有

$$A_1=A_3=1/6,\quad A_2=2/3;\quad x_1=0,\quad x_2=0.5,\quad x_3=1.$$

用此进行計算，则(11.5)对于 $i=2, 3$ 为

$$\begin{cases}\rho\tilde{\varphi}(0.5)=1.50\tilde{\varphi}(0.5)+1.25\tilde{\varphi}(1),\\ \rho\tilde{\varphi}(1)=3.75\tilde{\varphi}(0.5)+4.00\tilde{\varphi}(1),\end{cases}$$

$$\lambda=\frac{36}{\rho}.$$

由

$$\begin{vmatrix}1.50-\rho & 1.25\\ 3.75 & 4.00-\rho\end{vmatrix}=0,\quad \text{则}\ \rho=\begin{cases}5.25,\\ 0.25.\end{cases}$$

故

$$\lambda=\begin{cases}6.857,\\ 144.\end{cases}$$

$\lambda_1=6.857$ 是十分好的近似值。

§ 12 Neumann 級数解法

1) **方法** 假設所給积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy=f(x) \tag{12.1}$$

的解 $\varphi(x)$，可用下面的級数表示：

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\cdots, \tag{12.2}$$

系数 $\varphi_k(x)$ 可用

$$\varphi_0(x)=f(x),\quad \varphi_{k+1}(x)=\int_a^b K(x, y)\varphi_k(y)\,dy \tag{12.3}$$

来确定。

在此，定义了所謂迭核 $(k=1, 2, \cdots)$

$$K_1(x, y)=K(x, y),\quad K_{k+1}(x, y)=\int_a^b K(x,z)K_k(z,y)\,dz \tag{12.4}$$

后，$\varphi_k(x)$ 可表示为

$$\varphi_0(x)=f(x),\quad \varphi_k(x)=\int_a^b K_k(x, y)f(y)\,dy. \tag{12.5}$$

把它們代入級数(12.2)中，则有

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x, y, \lambda) f(y) dy. \tag{12.6}$$

函数 $\Gamma(x, y, \lambda)$ 称为积分方程(12.1)的**解核**，它可表示为下面的級数:

$$\Gamma(x, y, \lambda)=K_1(x, y)+\lambda K_2(x, y)+\cdots. \tag{12.7}$$

若核 $K(x, y)$ 有界

$$|K(x, y)| \leq M, \quad a \leq x, \quad y \leq b, \tag{12.8}$$

則級数(12.7), (12.2)至少对于

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)} \tag{12.9}$$

的 λ 值一致收斂，从而很容易說明級数所表示的是解 $\varphi(x)$.

实际上，当逐次求 $\varphi_k(x)$ 时，用适当的求积公式

$$\int_a^b \psi(x)\, dx \doteq \sum_{k=1}^{m} A_k \psi(x_k),$$

如下进行計算，較为便利。

对各分点的函数值，用

$$K_{ik}=K(x_i, x_k), \quad \varphi_n^{(i)}=\varphi_n(x_i),$$

$$\varphi^{(i)}=\varphi(x_i), \qquad f^{(i)}=f(x_i)$$

表示，則有

$$\varphi_{n+1}^{(i)}=\int_a^b K(x_i, y) \varphi_n(y) dy \doteq \sum_{k=1}^{m} A_k K_{ik} \varphi_n^{(k)}.$$

所以 $\varphi_n^{(i)}$ 的近似值 $\tilde{\varphi}_n^{(i)}$ 可由

$$\tilde{\varphi}_{n+1}^{(i)}=\sum_{k=1}^{m} A_k K_{ik} \tilde{\varphi}_n^{(k)}, \quad \tilde{\varphi}_0^{(i)}=\varphi_0^{(i)}=f^{(i)} \tag{12.10}$$

給出。用这些 $\tilde{\varphi}_n^{(i)}$ 作

$$\tilde{\varphi}^{(i)}=\tilde{\varphi}_0^{(i)}+\lambda \tilde{\varphi}_1^{(i)}+\lambda^2 \tilde{\varphi}_2^{(i)}+\cdots, \tag{12.11}$$

則可得到 $\varphi^{(i)}$ 的近似值。此級数对于満足(12.9)的 λ 收斂。

这样来作近似值 $\tilde{\varphi}^{(i)}$，很显然 $\tilde{\varphi}^{(i)}$ 滿足下面方程:

$$\tilde{\varphi}^{(i)}-\lambda\sum_{k=1}^{m}A_k K_{ik}\tilde{\varphi}^{(k)}=f^{(i)}. \tag{12.12}$$

此方程恰为在前节中，直接用近似法解积分方程时，所得的代数方程(11.5)．从而这里所述的解法，結果相当于解这个代数方程的一种近似法。

2) **对 Neumann 級数的解析延拓** 設 λ_1 为核 $K(x, y)$ 的絕对値最小的固有値，則給出解核 $\Gamma(x, y, \lambda)$ 的級数(12.7)只在圆 $|\lambda|<|\lambda_1|$ 内收斂。在此，当 $|\lambda|$ 趋近于 $|\lambda_1|$ 时，一般級数收斂比較迟緩。

此时，設 λ_1 为已知，若根据某一种方法，在某种程度知道了固有値的分布时，下述的方法是有效的。

以下用例子来說明。設 $\lambda_1=-1$ 为已知，求在 $\lambda=1$ 处的値(不是固有値)。

（i） 直接解析延拓法。設解对于 $|\lambda|<1$ 可展成級数

$$\varphi=\varphi_0+\lambda\varphi_1+\lambda^2\varphi_2+\cdots.$$

例如将 $\lambda=\lambda'+\frac{1}{2}$ 代入，就 λ' 加以整理，則有

$$\varphi=\varphi_0'+\lambda'\varphi_1'+\lambda'^2\varphi_2'+\cdots.$$

但

$$\begin{cases}\varphi_0'=\varphi_0+\dfrac{1}{2}\varphi_1+\dfrac{1}{4}\varphi_2+\dfrac{1}{8}\varphi_3+\cdots,\\ \varphi_1'=\varphi_1+\varphi_2+\dfrac{3}{4}\varphi_3+\cdots,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{cases}$$

这个 λ' 的級数，不論其他固有値分布如何，在对应于 $\lambda=1$ 的 $\lambda'=\frac{1}{2}$ 处收斂。

（ii） 去极法。解核在 $\lambda_1=-1$ 处有一級的极(如核是对称的，則所有的固有値是一級的极)。再有其他的固有値都在圓的外部 $|\lambda|>1$.

此时，函数$(\lambda+1)\Gamma(x, y, \lambda)$，$(\lambda+1)\varphi(x, \lambda)$在$\lambda=-1$处便不具有奇异点，所以其級数的展开式在半徑比1大的圓的內部$|\lambda|<|\lambda_2|$收斂。

这个展开式可直接得之如下：

$$(\lambda+1)\Gamma(x, y, \lambda)=(\lambda+1)[K(x, y)+\lambda K_2(x, y)+\cdots]$$
$$=K+\lambda[K+K_2]+\lambda^2[K_2+K_3]+\cdots,$$
$$(\lambda+1)\varphi(x, \lambda)=\varphi_0+\lambda[\varphi_0+\varphi_1]+\lambda^2[\varphi_1+\varphi_2]+\cdots.$$

特别是当$\lambda=1$时，则

$$\Gamma(x, y, 1)=\frac{1}{2}[K+(K+K_2)+(K_2+K_3)+\cdots],$$

$$\varphi(x, 1)=\frac{1}{2}[\varphi_0+(\varphi_0+\varphi_1)+(\varphi_1+\varphi_2)+\cdots].$$

(iii) 变数变換法。設函数$\eta=\omega(\lambda)$具有下列性质：

(a) $\omega^{-1}(\eta)$当$|\eta|<1$时正則，$\omega(\lambda)$在$|\eta|<1$关于$\omega^{-1}(\eta)$的象区域中正則。

(b) $\omega(0)=0$，$|\eta_n|=|\omega(\lambda_n)|\geq 1$.

(c) 对于必要的λ值，　$|\eta|=|\omega(\lambda)|<1$.

此时，在表示解核或者解的級数中代入$\lambda=\omega^{-1}(\eta)$，则得到关于$\eta$的級数，这个級数可能收斂得快。

例如所有固有値在半平面$\mathrm{Re}[\lambda]\leq-1$上时，适于以下的变换：

$$\eta=\frac{\lambda}{\lambda+2};\quad \lambda=\frac{2\eta}{1-\eta}=2[\eta+\eta^2+\eta^3+\cdots].$$

由于这个变換，如对解核Γ得到了級数

$$\lambda\Gamma(x, y, \lambda)=2K\eta+(2K+4K_2)\eta^2$$
$$+(2K+8K_2+8K_3)\eta^3+\cdots,$$

在$\lambda=1$相当于$\eta=\dfrac{1}{3}$的点上，这个級数收斂得非常快。

§13 积分方程对 Dirichlet 問題的应用

本节考察将积分方程应用于 Dirichlet 問題，也就是求在平面上的函数 $u(x, y)$，它在区域 G 内满足 $\Delta u=0$，在其边界 Γ 上为給定值。

1) **轉換为积分方程** 首先設 r 为二点 $P(x, y)$，$M(\xi, \eta)$ 的距离，則

$$u=\log r=\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \tag{13.1}$$

是 x, y 的函数，且是調和函数。也就是滿足方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{13.2}$$

从而此函数关于参数 ξ, η 的导数 u_ξ, u_η 也是調和的(x, y 的函数)。在此設 L 为任意方向，函数 u 作为 ξ, η 的函数，它在 L 方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial L}$ 是 u_ξ, u_η 的綫性結合(x, y 的函数)，所以也是調和函数。

設向量 $\overrightarrow{PM}$ 和方向 L 所成的角为 φ，則

$$\frac{\partial u}{\partial L}=\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial L}=\frac{\cos\varphi}{r},$$

所以 $\cos\varphi/r$ 是調和函数。

設所給的区域 G 有界，它的周界 Γ 用弧长 s，可表示为方程

$$x=x(s), \quad y=y(s) \quad (0\leqq s\leqq s_0).$$

$x'(s)$，$y'(s)$ 都是連續的，且不同时为零。再設所求調和函数的边界值是弧长 s 的連續函数 $f(s)$.

根据上面的討論，設 $P(x, y)$ 为任意点，$M(\xi, \eta)$ 为周界 Γ 上的点，$\overrightarrow{PM}$ 和周界 Γ 在 M 处的外向法綫所成的角为 φ，則对于任意連續函数 $\mu(s)$，

$$V(x, y)=\int_0^{s_0}\frac{\cos\varphi}{r}\mu(s)ds \tag{13.3}$$

是 x, y 的函数，而且在 G 内調和。

用 ω 表示方向 $\overrightarrow{PM}$ 与 x 軸正向所成的角，当 M 在周界上移动时，把它看作是 s 的函数，$d\omega$ 和 ds 之間有关系式

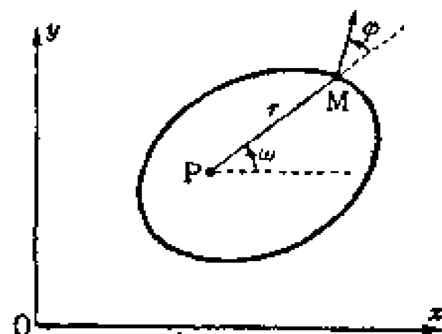


图 13.1

$$\frac{\cos\varphi}{r}ds=d\omega.$$

将此关系式代入(13.3)，則有

$$V=\int_0^{s_0}\frac{\cos\varphi}{r}\mu(s)ds=\int_0^{s_0}\mu(s)d\omega$$

$$=\int_0^{s_0}\frac{d\omega}{ds}\mu(s)ds. \qquad (13.4)$$

在此，ω 是 s 的函数，同时也是点 P 的坐标 x, y 的函数，亦即 $\omega=\omega(s, x, y)$. 对这个 $\omega=\omega(s, x, y)$，根据几何图形，很明显成立着下面的关系：

$$\int_0^{s_0}\frac{d\omega}{ds}ds=\oint_\Gamma d\omega=\begin{cases}2\pi(P\text{ 是 }G\text{ 内的点}),\\ \pi(P\text{ 是 }G\text{ 上的点}),\\ 0(P\text{ 是 }G\text{ 外的点}).\end{cases} \qquad (13.5)$$

现在研究一下下式的調和函数：

$$u(x, y)=\int_0^{s_0}\mu(s)\frac{d\omega}{ds}ds \qquad (13.6)$$

要求在周界上与 $f(s)$ 一致时，$\mu(s)$ 必須滿足那些条件。

当点 $P(x,y)$ 从 G 的内部趋近于周界上相当 $s=\sigma$ 的点 P_σ 时，应用(13.5)的性质，从(13.6)給出 $u(x, y)$ 的极限值为

$$\lim_{P\to P_\sigma}u(x, y)=\lim_{P\to P_\sigma}\int_0^{s_0}\mu(s)\frac{d\omega(s, x, y)}{ds}ds$$

$$=\lim_{P\to P_\sigma}\left[\int_0^{s_0}[\mu(s)-\mu(\sigma)]\frac{d\omega(s, x, y)}{ds}ds\right.$$

$$\left.+\mu(\sigma)\int_0^{s_0}\frac{d\omega(s, x, y)}{ds}ds\right]$$

$$=\int_0^{s_0}[\mu(s)-\mu(\sigma)]\frac{d\omega(s, \sigma)}{ds}ds+2\pi\mu(\sigma)$$

$$=\int_0^{s_0}\mu(s)\frac{d\omega}{ds}ds+\pi\mu(\sigma).$$

据此，$\mu(s)$ 的条件是

$$\mu(\sigma)-\int_0^{s_0}K(s,\sigma)\mu(s)ds=\frac{1}{\pi}f(\sigma). \tag{13.7}$$

其中

$$K(s,\sigma)=-\frac{1}{\pi}\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{y(s)-y(\sigma)}{x(s)-x(\sigma)}. \tag{13.8}$$

考虑积分方程

$$\mu(\sigma)-\lambda\int_0^{s_0}K(s,\sigma)\mu(s)ds=\frac{1}{\pi}f(\sigma), \tag{13.9}$$

則所求的 $\mu(\sigma)$ 可确定为此方程当 $\lambda=1$ 时的解。因为可以証明 $\lambda=1$ 不是固有值，这就意味着对于任意的 $f(s)$，解是存在的。由 (13.5) 可以直接得出

$$\int_0^{s_0}K(s,\sigma)ds=-1. \tag{13.10}$$

所以明显地 $\lambda=-1$ 是一个固有值，$\mu(\sigma)=C$（常数）是其固有函数。

这里，在 $\lambda=1$ 时 Neumann 級数 (13.2) 或 (13.7)（此时是所求的解）都不能应用，可是能够証明所有的固有值都是实数，而且在区間 $(-1, 1)$ 内不存在固有值，所以可以应用上节所述的解析延拓法。

再有，若周界 Γ 用弧 s 以外的参数 t 表示时，对 $\mu(\tau)$ 的积分方程是

$$\mu(\tau)+\int_0^{t_0}\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\tan^{-1}\frac{y(t)-y(\tau)}{x(t)-x(\tau)}\cdot\mu(t)\,dt=\frac{1}{\pi}f(\tau). \tag{13.11}$$

2) **Neumann 解法**　对积分方程 (13.9) 作置换

$$\lambda=\frac{\eta}{1-\eta},$$

并将(13.10)考虑进去，則得

$$\mu(\sigma)-\eta\int_0^{s_0}K(s,\sigma)[\mu(s)-\mu(\sigma)]ds=\frac{1-\eta}{\pi}f(\sigma). \quad (13.12)$$

因为 $\lambda=1$ 对应于 $\eta=\frac{1}{2}$，所以代替(13.9)来解当 $\eta=\frac{1}{2}$ 的(13.12)就可以了。

由于 $|\eta|\leqq 1/2$ 是相当于 $-1/3\leqq\lambda\leqq 1$，所以若能指出在此区間内沒有 (13.9) 的固有值，則对 $\eta=\frac{1}{2}$，用下面形式的級数解(13.12)，就能保証它收斂：

$$\mu(\sigma)=\mu_0(\sigma)+\mu_1(\sigma)+\mu_2(\sigma)+\cdots, \quad (13.13)$$

其中

$$\mu_0(\sigma)=\frac{1}{2\pi}f(\sigma),$$

$$\mu_{n+1}(\sigma)=\frac{1}{2}\int_0^{s_0}K(s,\sigma)[\mu_n(s)-\mu_n(\sigma)]ds.$$

現在用几何方法来考察核

$$K(s,\sigma)=-\frac{1}{\pi}\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds},$$

直接可指出 (13.13) 是收斂的，并能給出解。特別当区域 G 是凸的，其周界 Γ 上所有点的曲率半徑有限，并以 R_0 为最大的曲率半徑时，很容易看出成立着下面的估計式：

$$\left|\int_0^{s_0}\left[\frac{d\omega(s,\sigma_1)}{ds}-\frac{d\omega(s,\sigma_2)}{ds}\right]ds\right|\leqq\pi\left(1-\frac{s_0}{2\pi R_0}\right). \quad (13.14)$$

用此，可說明級数(13.13)比公比为

$$\rho=1-\frac{s_0}{4\pi R_0}<1 \quad (13.15)$$

的等比級数收斂得快。

3) **Kryloff 解法** 将所給区域的周界 Γ 分为 n 等分，各分点为 $s=s_1, s_2, \cdots, s_n$; $\Delta s=s_{k+1}-s_k$，則有

$$\int_0^{s_0}\mu(s)\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}ds \doteq \sum_{k=1}^{n}\mu(s_k)\Delta_k\omega(s_k,\sigma) \tag{13.16}$$

成立，但

$$\Delta_k\omega(s_k,\sigma)=\int_{s_k-\frac{\Delta s}{2}}^{s_k+\frac{\Delta s}{2}}\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}ds. \tag{13.17}$$

在此，对积分方程

$$\mu(\sigma)+\frac{1}{\pi}\int_0^{s_0}\mu(s)\frac{d\omega(s,\sigma)}{ds}ds=f(\sigma) \tag{13.18}$$

用此近似式，令 $\sigma=s_i$，則得

$$\mu(s_i)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\mu(s_k)\Delta_k\omega(s_k,s_i)\doteq f(s_i).$$

因此，代数方程

$$\tilde{\mu}(s_i)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}(s_k)\Delta_k\omega(s_k,s_i)=f(s_i), \tag{13.19}$$

其中

$$\Delta_k\omega(s_k,s_i)=\int_{s_k-\frac{\Delta s}{2}}^{s_k+\frac{\Delta s}{2}}\frac{d\omega(s,s_i)}{ds}ds \tag{13.20}$$

的解 $\tilde{\mu}(s_i)$，給出了 $\mu(s_i)$ 的近似值。这里的 $\Delta_k\omega(s_k,s_i)$ 当具体給出区域时，可根据图形直接求出它的值。

解(13.19)，如果知道 $\tilde{\mu}(s_i)$ 的値，則

$$\tilde{\mu}(s)=f(s)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}(s_k)\Delta_k\omega(s_k,s) \tag{13.21}$$

是解 $\mu(s)$ 的近似函数。

用 $\tilde{\mu}(s)$ 可得到 Dirichlet 問題的近似解

$$\tilde{u}(x,y)=\int_0^{s_0}\tilde{\mu}(s)\frac{d}{ds}\omega(s,x,y)ds,$$

其中

$$\omega(s, x, y)=\tan^{-1}\frac{y(s)-y}{x(s)-x}.$$

可是使用和(13.16)同样的近似式,即用

$$\tilde{u}(x, y)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}(s_k)\Delta_k\omega(s_k, x, y)$$

似乎更为便利。

使用几何的方法，对于用(13.21)求出的$\tilde{\mu}(s)$的誤差$|\mu(s)-\tilde{\mu}(s)|$，只用已知数就能正确加以估計，这里不作詳細的討論。但須注意,当周界充分光滑时,可以导出

$$|\mu(s)-\tilde{\mu}(s)|=O\left(\frac{1}{n^2}\right). \qquad (13.22)$$

4) 例 对椭圓的 Dirichlet 問題 对椭圓 $x=a\cos t$, $y=b\sin t\,(a\geqq b)$,有

$$\frac{d}{dt}\tan^{-1}\frac{y(t)-y(\tau)}{x(t)-x(\tau)}=\frac{ab}{a^2+b^2-(a^2-b^2)\cos(t+\tau)}.$$

所以,要解方程,根据(13.11)为

$$\pi\mu(t)+\int_0^{2\pi}\frac{ab}{a^2+b^2-(a^2-b^2)\cos(t+\tau)}\mu(\tau)d\tau=\pi f(t).$$

对$f(t)=(5+3\cos 2t)/16$,用各种近似解法所得的近似值如下:

这里都是对$t=3\pi/16$的$\mu(t)$的值。

$$\alpha=0.0702917,$$

$$\beta=0.0702919,$$

$$\gamma=0.07009,$$

$$\delta=0.07033,$$

其中α是由正确解$\mu(t)=(25+27\cos 2t)/160\pi$所得的值，$\beta$是前节2)中用去极法,从最初取到5项的和。$\gamma$是前节2)中,用变换$\lambda=2\eta/(1-\eta)$,当$\eta=1/3$时取到$\eta^5$的值。$\delta$是用本节的 Neumann 解法取到$\mu_5$的值。

§ 14 用退化核的近似解法

1) **有退化核的积分方程** 当积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy=f(x) \tag{14.1}$$

的核是退化核，也就是

$$K(x, y)=\sum_{k=1}^n \alpha_k(x)\beta_k(y) \tag{14.2}$$

时，方程是容易解的。将(14.2)代入(14.1)，可知其解为

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{i=1}^n A_i\alpha_i(x). \tag{14.3}$$

但是，系数 A_i 满足代数方程組

$$A_i-\lambda\sum_{k=1}^n \beta_{ik}A_k=\lambda f_i, \tag{14.4}$$

其中

$$f_i=\int_a^b f(x)\beta_i(x)dx,\quad \beta_{ik}=\int_a^b \alpha_k(x)\beta_i(x)dx. \tag{14.5}$$

設(14.4)的系数所作的行列式 $\Delta(\lambda)$ 为

$$\Delta(\lambda)=|\delta_{ik}-\lambda\beta_{ik}|, \tag{14.6}$$

当 $\Delta(\lambda)\neq 0$ 时，可以决定系数 A_i，并从(14.3)給出积分方程的解。

2) **用近似核解时的誤差估計** 有退化核的积分方程，可以正确的求解，要解具有任意核的积分方程，自然产生了用近似于核的退化核来代替核的想法，并以近似退化核的解，作为所給問題的近似解。关于此时所产生的誤差有下面的定理。

定理 若两个积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy=f(x), \tag{14.7}$$

$$\tilde{\varphi}(x)-\lambda\int_a^b k(x, y)\tilde{\varphi}(y)dy=g(x) \tag{14.8}$$

满足下面三个条件：

$$\int_a^b |K(x, y)-k(x, y)| dy<h, \tag{14.9}$$

$$|f(x)-g(x)|<\eta, \tag{14.10}$$

$$\int_a^b |\gamma(x, y, \lambda)| dy<B, \tag{14.11}$$

其中 $\gamma(x, y, \lambda)$是(14.8)的解核。

此时，如有条件

$$1-|\lambda|h(1+|\lambda|B)>0 \tag{14.12}$$

成立，则(14.7)有唯一的解 $\varphi(x)$，它和(14.8)的解 $\tilde{\varphi}(x)$之間，有下面的不等式成立：

$$|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|<\frac{N|\lambda|h(1+|\lambda|B)^2}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|B)}+\eta(1+|\lambda|B), \tag{14.13}$$

其中 N 是$|f(x)|$的上界。

証明　令 M 为$|\varphi(x)|$的上界。$|\varphi(x)|\leqq M$，从(14.7)

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b [K(x, y)-k(x, y)]\varphi(y)dy=f^*(x). \tag{14.14}$$

对于这个 $f^*(x)$有下面的估計：

$$|f^*(x)|\leqq|f(x)|+|\lambda|\int_a^b |K(x, y)-k(x, y)|\cdot|\varphi(y)|dy$$

$$\leqq N+|\lambda|M\int_a^b |K(x, y)-k(x, y)|dy$$

$$\leqq N+|\lambda|Mh.$$

从而，用(14.14)

$$|\varphi(x)|=\left|f^*(x)+\lambda\int_a^b \gamma(x, y, \lambda)f^*(y)dy\right|$$

$$<(N+|\lambda|Mh)(1+|\lambda|B).$$

所以

$$M<(N+|\lambda|Mh)(1+|\lambda|B),$$

$$\{1-|\lambda|h(1+|\lambda|B)\}M<N(1+|\lambda|B).$$

在此,若条件

$$1-|\lambda|h(1+|\lambda|B)>0 \tag{14.12}$$

成立,则

$$M<\frac{N(1+|\lambda|B)}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|B)}. \tag{14.15}$$

这样,可知(14.7)的解 $\varphi(x)$是有界的,所以(14.7)的解是唯一的,且 λ 不是固有值。

从(14.14)减去(14.8),对于

$$\psi(x)=\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)$$

得到下面方程:

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b k(x,\ y)\psi(y)dy=f^*(x)-g(x).$$

由此,有

$$\begin{aligned}|f^*(x)-g(x)|&\leqq|f^*(x)-f(x)|+|f(x)-g(x)|\\&=\left|\lambda\int_a^b[K(x,\ y)-k(x,\ y)]\varphi(y)dy\right|\\&\quad+|f(x)-g(x)|\leqq|\lambda|Mh+\eta,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|\psi(x)|&\leqq|f^*(x)-g(x)|\\&\quad+|\lambda|\int_a^b|\gamma(x,\ y,\ \lambda)|\cdot|f^*(x)-g(x)|dy\\&\leqq(|\lambda|Mh+\eta)(1+|\lambda|B).\end{aligned} \tag{14.16}$$

将 M 的估計式(14.15)代入得(14.13). (証畢)

系 在和本定理的同一假設下,令 $\tilde{M}$ 为$|\tilde{\varphi}(x)|$的上界,则更精确的估計式为

$$|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|\leqq\frac{(|\lambda|\widetilde{M}h+\eta)(1+|\lambda|B)}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|B)}. \tag{14.17}$$

証明 令 δ 是 $|\psi(x)|=|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|$ 的最大値,則

$$M\leqq\widetilde{M}+\delta.$$

从而,由(14.16)得

$$\delta\leqq[|\lambda|(\widetilde{M}+\delta)h+\eta](1+|\lambda|B).$$

解出 δ, 則得(14.17). (証毕)

例 用本章的方法,近似的解积分方程

$$\varphi(x)-\int_0^{\frac{1}{2}}\sin xy\varphi(y)dy=f(x). \tag{1}$$

由于

$$\sin xy=xy-\frac{x^3y^3}{6}+\frac{x^5y^5}{120}-\cdots,$$

只取展开式最初的前两項,則有

$$\tilde{\varphi}(x)-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(xy-\frac{x^3y^3}{6}\right)\tilde{\varphi}(y)dy=f(x). \tag{2}$$

此解可用

$$\tilde{\varphi}(x)=Ax+Bx^3+f(x)$$

表示,代入方程

$$Ax+Bx^3-f_1x-f_2x^3-\frac{1}{24}Ax-\frac{1}{160}Bx+\frac{1}{960}Ax^3+\frac{1}{5376}Bx^3=0,$$

其中

$$f_1=\int_0^{\frac{1}{2}}yf(y)dy,\quad f_2=-\frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{2}}y^3f(y)dy,$$

所以

$$\frac{23}{24}A-\frac{1}{160}B=f_1,\quad \frac{1}{960}A+\frac{5377}{5376}B=f_2.$$

$$A=1.043277\left[\frac{5377}{5376}f_1+\frac{1}{160}f_2\right],$$

$$B=1.043277\left[-\frac{1}{960}f_1+\frac{23}{24}f_2\right].$$

(2)的解 $\tilde{\varphi}(x)$ 为

$$\tilde{\varphi}(x)=f(x)+\int_0^{\frac{1}{2}}1.043277[1.0001860xy-0.0010416(x^3y+xy^3)$$
$$-0.1597222x^3y^3]f(y)dy.$$

从而，解核是

$$\gamma(x,\ y,\ 1)=1.043277[1.0001860\,xy$$
$$-0.0010416(x^3y+xy^3)-0.1597222\,x^3y^3].$$

由此，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|\gamma(x,\ y,\ 1)|dy<\frac{1}{12}.$$

再有，对于

$$0\leqq x\leqq\frac{1}{2},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|K(x,\ y)-k(x,\ y)|\,dy\leqq\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^5y^5}{120}\,dy$$
$$=\frac{1}{64\cdot720}x^5<\frac{3}{4\cdot10^6}.$$

在(14.13)中，令

$$\lambda=1,\quad B=\frac{1}{12},\quad h=\frac{3}{4\cdot10^6},\quad \eta=0,$$

得

$$|\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)|<N\times10^{-6},$$

但 N 是 $|f(x)|$ 的上限。

特别，若取

$$f(x)=1+\frac{1}{x}\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)=1-\frac{x}{8}+\frac{x^3}{384}-\frac{x^5}{46080}+\cdots,$$

在 $0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ 上，$|f(x)|\leqq1$.

从而此时近似解

$$\tilde{\varphi}(x)=1+0.0000009\,x-0.0000002\,x^3$$

的誤差，确切的說，比 10^{-6} 小。真正的解为 $\varphi(x)=1$，所以估計成立。

3) **和 Galerkin 方法的关系** 設积分方程

$$L(\varphi)=\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ y)\varphi(y)dy-f(x)=0 \quad (14.18)$$

的近似解为 $\tilde{\varphi}(x)$，假定用預先选定的函数列 $\varphi_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 表示为

$$\tilde{\varphi}(x)=f(x)+\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x), \tag{14.19}$$

用

$$\int_a^b L(\tilde{\varphi})\varphi_i(x)dx=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{14.20}$$

决定系数 c_k 的方法，叫做 Galerkin 法。这个方法，实质上不外乎是用适当的退化核 $K_n(x, y)$ 来置换核 $K(x, y)$.

首先要注意，不失一般性，可以把 $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ 看作某个正规正交完备函数系 $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots, n, \cdots)$ 的最初 n 个函数。令 $K(x, y)$ 用完备系 $\varphi_k(x)$ 展开时的前 n 项部分和为 $K_n(x, y)$，则

$$K_n(x,\ y)=\sum_{k=1}^{n}\psi_k(y)\varphi_k(x);$$

$$\psi_k(y)=\int_a^b K(x,\ y)\varphi_k(x)dx,$$

考虑以此为核的积分方程

$$L_n(\varphi)=\varphi(x)-\lambda\int_a^b K_n(x,\ y)\varphi(y)dy-f(x)=0, \tag{14.21}$$

因为它具有退化核，所以有(14.19)形式的精确解，它的系数 c_k 可由下式决定：

$$\int_a^b L_n(\tilde{\varphi})\varphi_i(x)dx=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{14.22}$$

于是，对于 $k=1, 2, \cdots, n$，有关系式

$$\int_a^b K_n(x,\ y)\varphi_k(x)dx=\int_a^b K(x,\ y)\varphi_k(x)dx,$$

所以

$$\int_a^b L(\tilde{\varphi})\varphi_i(x)dx=\int_a^b L_n(\tilde{\varphi})\varphi_i(x)dx.$$

因而，用 Galerkin 法所得到的(14.18)的近似解 $\tilde{\varphi}(x)$，是退化核方程(14.21)的精确解。

第3章 逐次近似法

§15 方法例举

首先用簡单例子說明一下什么是逐次近似法。考慮現在天文学中的 Kepler 方程

$$x-a\sin x=b \quad (a>0). \tag{15.1}$$

令

$$f(x)=a\sin x+b, \tag{15.2}$$

則方程表示为下列形式:

$$x=f(x). \tag{15.3}$$

为了解此方程,根据

$$\begin{cases} x_0=c, \\ x_{n+1}=f(x_n) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots), \end{cases} \tag{15.4}$$

以 c 作为初始値,作出所謂近似数列 $\{x_n\}$. 在此假設 $\{x_n\}$ 能表示成收斂的数列,則

$$x^*=\lim_{n\to+\infty} x_n \tag{15.5}$$

显然满足 $x^*=f(x^*)$, 所以得出了(15.3)就是(15.1)的根。

由于对于任意的 ξ,η 有关系式

$$f(\xi)-f(\eta)=a(\sin\xi-\sin\eta)=2a\cos\frac{\xi+\eta}{2}\sin\frac{\xi-\eta}{2},$$

所以

$$|f(\xi)-f(\eta)|\leqq 2a\left|\sin\frac{\xi-\eta}{2}\right|\leqq a|\xi-\eta| \tag{15.6}$$

成立,从而对于 $k\geqq 1$, 有关系式

$$|x_{k+1}-x_k|=|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqq a|x_k-x_{k-1}|,$$

如此,继續进行 r 次,对于 $0\leqq r\leqq k$, 則有

$$|x_{k+1}-x_k|\leqq a^r|x_{k+1-r}-x_{k-r}|. \qquad (15.7)$$

由此，对于 $m>n\geqq 1$，就有

$$|x_m-x_n|=\left|\sum_{k=n}^{m-1}(x_{k+1}-x_k)\right|\leqq\sum_{k=n}^{m-1}|x_{k+1}-x_k|$$

$$\leqq\sum_{t=1}^{m-n}a^t|x_n-x_{n-1}|\leqq a^{n-1}\left(\sum_{t=1}^{m-n}a^t\right)|x_1-x_0|. \qquad (15.8)$$

从而，若有 $a<1$，就有下面的不等式成立：

$$|x_m-x_n|\leqq\frac{a^n}{1-a}|x_1-x_0| \quad (m>n\geqq 1). \qquad (15.9)$$

由此可知，数列 $\{x_n\}$ 满足 Cauchy 收斂条件

$$\lim_{m,n\to\infty}|x_m-x_n|=0. \qquad (15.10)$$

如此假設 $a<1$，可知用 (15.4) 所作出的逐次近似数列 $\{x_n\}$，对于任何的初始値 c，都收斂于方程的根 x^*。再有，在 (15.9) 中，当 $m\to\infty$ 时，就有

$$|x^*-x_n|\leqq\frac{a^n}{1-a}|x_1-c|. \qquad (15.11)$$

它不仅表示出数列 $\{x_n\}$ 的收斂速度，并給出了关于 x_n 的誤差估計。特別是在实际应用中，由于 $a\ll 1$，所以这种方法适于求根的近似值。

如上所述，由于逐次近似法一般可适用于非綫性問題中，所以在应用上是很重要的。另外，逐次近似法能同时指出解的存在性，因而在理論上也有重要的作用。

§16 逐次近似法的理論

1) **准备知識** 为了叙述逐次近似法的一般理論，首先来复习一下泛函分析中的一些概念和記号。

由下面的形式来定义抽象距离空間。

对于属于空間 R 的任意二点 f_1, f_2（簡单記为 $f_1, f_2\in R$），用

非負的数定义这二点的距离，記它为 $\|f_1-f_2\|$，而且满足下面三个条件：

（i） $\|f_1-f_2\|=\|f_2-f_1\|$，

（ii） $\|f_1-f_2\|\geqq 0$；$\|f_1-f_2\|=0$ 只当 $f_1=f_2$ 时才成立，

（iii） 对于任意的 $f_1, f_2, f_3\in R$，有

$$\|f_1-f_2\|\leqq\|f_1-f_3\|+\|f_3-f_2\|. \tag{16.1}$$

在这里应注意，并不一定必須假定 R 是綫性空間，从而 f_1-f_2 就不一定是 R 中的点。因此不能把 $\|f_1-f_2\|$ 看作是 f_1-f_2 在普通意义下的范数。在此只是为了方便借用一下范数 $\|\quad\|$ 这个記号❶。

R 的子空間 F 满足以下条件时，叫作完备的。属于 F 的任意点列：$f_1, f_2, \cdots$，若满足 Cauchy 收斂条件

$$\lim_{m,n\to\infty}\|f_m-f_n\|=0, \tag{16.2}$$

則在 F 中存在这样的 f，使

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0 \tag{16.3}$$

成立。这个 f 称为点列 f_n 的极限。

对于 R 的子空間 F 中任意点 f，使其与 R 的点 Tf 相对的算子 T；若对于任意的 $f_1, f_2\in F$，存在满足

$$\|Tf_1-Tf_2\|\leqq K\|f_1-f_2\| \tag{16.4}$$

的常数 K 时，称 T 满足 **Lipschitz 条件**，其中的 K 叫作 **Lipschitz 常数**。

关于以上一些概念，举一个具体例子加以說明。

定义在閉区間 $[a, b]$ 上的連續函数 $f(x)$ 的全体，若定义其距离为

---

❶ 如果 R 不是綫性空間，更一般地可采用 $\rho(f, g)$ 来表示 f，g 两点的距离，可参看本丛书的《集合，拓扑，測度》中的第 2 章 §6.1，或参看关肇直著《泛函分析》第一章 §1。——譯者注

$$\|f_1-f_2\|=\max_{a\leq x\leq b}\frac{|f_1(x)-f_2(x)|}{W(x)}, \qquad (16.5)$$

那么 R 是距离空間。这里 $W(x)$ 是在区間 $[a, b]$ 上的正値連續函数。(此处 R 可认为是綫性空間，特别当 $W(x)=1$ 时，記号 $\|\ \ \|$ 就是普通 C——范数。)

在連續函数所作的距离空間 R 中，对于任意給定的两个連續函数 $u_1(x)$, $u_2(x)$ $(u_1(x)\leqq u_2(x))$，满足

$$u_1(x)\leqq f(x)\leqq u_2(x)$$

的函数 $f(x)$ 的全体，形成完备子空間 F (这个 F 不是綫性空間)。

設 $G(x, \xi)$ 是在 $a\leqq x, \xi\leqq b$ 上的有界連續函数，对属于 F 的函数 $f(x)$，算子 T，若由

$$Tf(x)=\int_a^x G(x, \xi)f(\xi)d\xi \qquad (16.6)$$

来定义时，則算子 T 满足 Lipschitz 条件，以

$$K=\max_{a\leqq x\leqq b}\frac{\int_a^b |G(x, \xi)|W(\xi)d\xi}{W(x)} \qquad (16.7)$$

为 Lipschitz 常数。即

$$\|Tf_1-Tf_2\|\leqq K\|f_1-f_2\|.$$

2) 逐次近似法的一般理論　設定义在距离空間 R 的完备子空間 F 的算子 T，满足 Lipschitz 常数 K 的 Lipschitz 条件。此时考慮解方程

$$f=Tf. \qquad (16.8)$$

为此，对于 $u_0\in F$ 作逐次近似数列

$$u_{n+1}=Tu_n \quad (n=0, 1, 2, \cdots), \qquad (16.9)$$

在此假定所有 $u_n\in F$，再根据 Lipschitz 条件，对于 $k\geqq 1$ 有

$$\|u_{k+1}-u_k\|=\|Tu_k-Tu_{k-1}\|\leqq K\|u_k-u_{k-1}\|.$$

如此进行 r 次，对于 $0\leqq r\leqq k$，有

$$\|u_{k+1}-u_k\| \leqq K^r\|u_{k+1-r}-u_{k-r}\|. \tag{16.10}$$

从而，对于 $m>n\geqq 1$，根据三角不等式(16.1)与(16.10)，得到

$$\|u_m-u_n\| = \left\|\sum_{k=n}^{m-1}(u_{k+1}-u_k)\right\| \leqq \sum_{k=n}^{m-1}\|u_{k+1}-u_k\|$$

$$\leqq \sum_{t=1}^{m-n} K^t\|u_n-u_{n-1}\| \leqq K^{n-1}\left(\sum_{t=1}^{m-n}K^t\right)\|u_1-u_0\|. \tag{16.11}$$

因此，当 $K<1$，就成立着下列的不等式：

$$\|u_m-u_n\| \leqq \frac{K^n}{1-K}\|u_1-u_0\| \quad (m>n\geqq 1). \tag{16.12}$$

另外，在 R 中满足不等式

$$\|h-u_1\| \leqq \frac{K}{1-K}\|u_1-u_0\| \tag{16.13}$$

的点 h 之全体构成子空間 S（今后称这样的子空間为 S 球），若 S 球含在子空間 F 内，在(16.12)中令 $n=1$，则有

$$\|u_m-u_1\| \leqq \frac{K}{1-K}\|u_1-u_0\|, \tag{16.12'}$$

这样就保証了所有的 u_m 都属于 F。于是也就有了无限次作逐次近似点列的可能性。

此时，于(16.12)中，当 $K<1$，就有

$$\lim_{m,n\to\infty}\|u_m-u_n\|=0.$$

根据假設 F 是完备的，故此极限 u 存在，即

$$\lim_{m\to\infty}\|u-u_n\|=0. \tag{16.14}$$

这样，下面所証的 u 就是(16.8)的解。就是从(16.1)和(16.4)有不等式

$$\begin{aligned}\|Tu-u\| &\leqq \|Tu-Tu_n\|+\|Tu_n-u\| \\ &= \|Tu-Tu_n\|+\|u_{n+1}-u\| \\ &\leqq K\|u-u_n\|+\|u_{n+1}-u\|.\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，依(16.14)，右端收斂于零，所以

$$\|Tu-u\|=0, \text{ 即 } Tu=u.$$

如此，就指出了方程(16.8)解的存在性。

关于解的唯一性，可如下来説明。如 v 是方程 (16.8) 的解。設 $Tv=v$，于是从(16.4)有

$$\|u-v\|=\|Tu-Tv\|\leqq K\|u-v\|,$$

但是由于 $K<1$，所以

$$\|u-v\|=0, \text{ 故得 } u=v.$$

再从(16.1)与(16.2)

$$\|u-u_n\|\leqq\|u-u_m\|+\|u_m-u_n\|\leqq\|u-u_m\|+\frac{K^n}{1-K}\|u_1-u_0\|,$$

在此式中，考察当 $m\to\infty$ 时的极限，

$$\|u-u_n\|\leqq\frac{K^n}{1-K}\|u_1-u_0\|. \tag{16.15}$$

这个式子是表示 u_n 的近似程度。特别当 $n=1$ 时，可以得到解 u 在 S 球内的結論。

3) **应用于具体問題上的处理方法** 将上述的一般理論，加以归納，应用于具体問題时，可按下面的方式进行。根据所給出的問題，在距离空間 R 的子空間 F 中，首先确定它的算子 T.

(1) F 关于距离空間 R 是完备的。

(2) 对于任意的 $f\in F$, $Tf\in R$ 是唯一确定的。

(3) 方程 $Tf=f$ 与已給出的問題等价。

(4) 算子 T 在 F 内満足 Lipschitz 条件，其 Lipschitz 常数比 1 小。

此时，再象下面那样选取初始値 $u_0\in F$.

(5) 球 S 含在 F 内。

如果能够具有这样的形式，则适用一般所討論的結果，可以得到下面的結論：

(i) 給出的問題在 S 内仅有唯一的解。

(ii) 逐次近似列可以无限次进行。

(iii) 逐次近似列按 R 的距离收斂于解。

(iv) 对于近似列誤差的估計,成立着公式(16.15)。

总之,对于所給的問題,主要的关鍵和技巧,是如何选取 R, F, T, u_0. 在許多情况下直接可以驗証,所有的 u_n 都在 F 内,特別应該指出的是,可以不要求条件(5)必須成立。

§17 对于联立方程組的逐次近似法

应用各种近似解法来解微分方程时,經常产生解联立一次方程組的問題。在此首先討論一下,用逐次近似法解方程的收斂条件。

考察联立一次方程組

$$x^{(i)}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}x^{(k)}+b_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m), \tag{17.1}$$

为了求解,用

$$x_{n+1}^{(i)}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}x_n^{(k)}+b_i \tag{17.2}$$

作逐次近似列 $x_n^{(i)}$.

以 $x^{(i)}$ 为分量的向量用 x 表示,则(17.1),(17.2)的形式可表示为

$$x=Tx, \quad x_{n+1}=Tx_n, \tag{17.3}$$

于是对向量 x 的集合引入适当的距离,而向量 x 可以看作是距离空間的点。关于距离,可以采取象下面所指出的各种定义,因而可以得出各种不同的收斂判别条件。

(a) 設 x 的分量为 $x^{(i)}$, y 的分量为 $y^{(i)}$, 用

$$\|x-y\|=\max_i|x^{(i)}-y^{(i)}| \tag{17.4}$$

来定义 x, y 間的距离,此时

$$\begin{aligned}\|Tx-Ty\| &= \max_i \left| \sum_{k=1}^m a_{ik}(x^{(k)}-y^{(k)}) \right| \\ &\leqq \max_i \sum_{k=1}^m |a_{ik}| \cdot |x^{(k)}-y^{(k)}| \\ &\leqq \left(\max_i \sum_{k=1}^m |a_{ik}| \right) \cdot \max_k |x^{(k)}-y^{(k)}| \\ &\leqq K\|x-y\|,\end{aligned}$$

其中

$$K = \max_i \sum_{k=1}^m |a_{ik}|.$$

从而，**行和判别条件**

$$\max_i \sum_{k=1}^m |a_{ik}| < 1 \tag{17.5}$$

是逐次近似法收斂的充分条件。

(b) 用

$$\|x-y\| = \sum_{i=1}^m |x^{(i)}-y^{(i)}| \tag{17.6}$$

来定义 x, y 間的距离。此时，

$$\begin{aligned}\|Tx-Ty\| &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{k=1}^m a_{ik}(x^{(k)}-y^{(k)}) \right| \\ &\leqq \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m |a_{ik}| \cdot |x^{(k)}-y^{(k)}| \\ &\leqq \max_k \sum_{i=1}^m |a_{ik}| \cdot \sum_{k=1}^m |x^{(k)}-y^{(k)}| \\ &\leqq K\|x-y\|.\end{aligned}$$

从而，**列和判别条件**

$$\max_k \sum_{i=1}^m |a_{ik}| < 1 \tag{17.7}$$

也是逐次近似收斂的充分条件。

(c) 把 x, y 看作是 Euclid 空間的点，則

$$\|x-y\|^2 = \sum_{i=1}^m |x^{(i)}-y^{(i)}|^2. \tag{17.8}$$

此时，从 Schwarz 不等式直接得出

$$\|Tx-Ty\|^2 \leq \|x-y\|^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^2.$$

从而得到 **Schmidt 判别条件**

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}^2 < 1. \tag{17.9}$$

不論以上那种情况，逐次近似列的极限，都是所給方程組(17.1)的解，但用(16.15)估計时，第 n 次近似和解的接近程度，必須很好地考慮每个距离的意义。

注 1 如果逐次近似列不用(17.2)，而用下面的式子来作：

$$x_{n+1}^{(i)} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_{n+1}^{(k)} + \sum_{k=i}^{m} a_{ik} x_n^{(k)} + b_i. \tag{17.10}$$

一般可使收斂加快。

注 2 一般的非綫性方程組

$$x^{(i)} = \varphi_i(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)})$$

也可用逐次近似法。此时，行和判別条件是

$$\max_i \sum_{k=1}^{m} \left(\max \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^{(k)}} \right| \right) < 1. \tag{17.11}$$

注 3 对于无限一次方程組，利用本章所討論的方法，可以証明 § 6 中的定理 1.

关于詳細的探討，讀者可自行研究。

§ 18 对于初始值問題的逐次近似法

1) 一阶常微分方程的初始值問題 正如我們所熟知的，在初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的条件下，解微分方程

$$y' = f(x, y), \tag{18.1}$$

和解积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \tag{18.2}$$

是等价的。这就是相当于 Volterra 型积分方程

$$y=Ty;\ Ty(s)=y_0+\int_{s_0}^{s} G(s,\ t,\ y(t))\,dt \tag{18.3}$$

的特殊情况。

这里，核 $G(s,\ t,\ y)$ 在区域 H：

$$|s-s_0|\leqq a^*,\ |t-s_0|\leqq a^*,\ |y-y_0|\leqq b \tag{18.4}$$

是可积，并且是有界的，即

$$|G(s,\ t,\ y)|\leqq M. \tag{18.5}$$

再有，核 G 在区域 H 內，假定满足 Lipschitz 条件

$$\left|\frac{G(s,\ t,\ y_1)-G(s,\ t,\ y_2)}{y_1-y_2}\right|\leqq L, \tag{18.6}$$

那么，把区間 J

$$J:\ |s-s_0|\leqq a=\min\ (a^*,\ b/M) \tag{18.7}$$

上的連續函数 $y(s)$，看作是用实函数 $W(s)>0$，以

$$\|y_1(s)-y_2(s)\|=\max_{s\in J}\frac{|y_1(s)-y_2(s)|}{W(s)} \tag{18.8}$$

为距离的距离空間 R 的点。以(18.3)为算子 T 的定义，它的定义域是由在区域 J 上

$$|y(s)-y_0|\leqq b,\ y(s_0)=y_0 \tag{18.9}$$

的連續函数 $y(s)$ 所作的 R 的完备子空間 F.

于是，取初始值为

$$y_0(s_0)=y_0,\ |y_0(s)-y_0|\leqq b$$

的函数 $y_0(s)$ 作逐次近似列

$$y_{n+1}(s)=Ty_n(s), \tag{18.10}$$

显然，所有的 $y_n(s)$ 都属于 F.

那么，对于任意的 $y(s),\ z(s)\in F$，下面式子成立：

$$\|Ty-Tz\|=\max_{s\in J}\frac{|Ty-Tz|}{W(s)}$$

$$\leqq\max_{s\in J}\frac{1}{W(s)}\int_{s_0}^{s}|G(s,\ t,\ y)-G(s,\ t,\ z)|\,dt$$

$$\leqq \max_{s\in J}\frac{L}{W(s)}\int_{s_0}^{s}|y-z|\,dt$$

$$\leqq \max_{s\in J}\frac{L}{W(s)}\int_{s_0}^{s}W(t)\,dt\cdot\|y-z\|.$$

所以算子 T 满足 Lipschitz 条件,并以

$$K=L\max_{s\in J}\frac{1}{W(s)}\int_{s_0}^{s}W(t)\,dt \tag{18.11}$$

为 Lipschitz 常数。

在此,如采用 $W(s)$ 为

$$W(s)=e^{\lambda s},\quad \lambda>L, \tag{18.12}$$

对于 $s>s_0$, 由于

$$e^{-\lambda s}\int_{s_0}^{s}e^{\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}[1-e^{-\lambda(s-s_0)}]<\frac{1}{\lambda}<\frac{1}{L},$$

就总可保証 $K<1$. 对于核 G 来說,在上面的假設下,可以証明在区間 J 中解的存在性和唯一性。

为了符合数值計算的要求,可以选取(18.12)以外的适当函数作为 $W(x)$.

例 求微分方程

$$y'=f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\quad y'(0)=-1,$$

在 $0\leqq x\leqq 1$ 上的近似解。

取 $y_0=-1+\alpha x$ 作为第 0 阶近似。选取这样的 α 使 $y_1-y_0=\delta(x)$尽量的小。由

$$y_1(x)=-1+\frac{x}{2}-\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{1+\alpha^2}{6}x^3,$$

取 $\alpha=0.45$. 在 $0\leqq x\leqq 1$ 中以满足不等式 $-1.02\leqq y(x)\leqq 0$ 的連續函数的全体作为子空間 F. 就有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=|y|\leqq L=1.02.$$

那么,选取 $W(x)=1+4x^2$ 后,則有

$$\max_{[0,1]}\frac{1}{W(x)}\int_0^x W(t)\,dt=\frac{7}{15}.$$

于是，从(18.11)得到

$$K=1.02\times\frac{7}{15}=0.476<1,\quad \frac{K}{1-K}=0.9084.$$

計算 $\|y_1-y_0\|$，得到 $\|y_1-y_0\|=0.00508$，一般地說，球 S 为

$$\|y-y_1\|\leqq\frac{K}{1-K}\|y_1-y_0\|=0.00462,$$

或是

$$|y-y_1|\leq 0.00462(1+4x^2)\quad (0\leqq x\leqq 1).$$

由于球 S 确实在 F 之內，所以这个式子也給出了近似解 y_1 誤差的界限。

注 一阶常微分方程的初始值問題。

对于 $\frac{d}{dx}y^{(i)}=f_i(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots, y^{(m)})$；$y^{(i)}(x_0)=y_0^{(i)}$，也可用逐次近似法。$y$ 表示以 $y^{(i)}$ 为分量的向量，f 表示以 f_i 为分量的向量。这样，則所給的問題就成为积分方程

$$y=Ty;\quad Ty=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t, y(t))dt.$$

函数 $f_i(x, y^{(k)})$ 在空間的凸区域 H，滿足

$$|f_i(x, y^{(k)})-f_i(x, z^{(k)})|\leqq\sum_{k=1}^{m}L_{ik}(x)|y^{(k)}-z^{(k)}|$$

的 Lipschitz 条件。此时，取

$$\|y-z\|=\max_{x\in J}\left(\max_i\frac{|y^{(i)}(x)-z^{(i)}(x)|}{W_i(x)}\right)$$

作为距离，則算子 T 滿足以

$$K=\max_{x\in J}\left(\max_i\frac{1}{W_i(x)}\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{m}L_{ik}(t)W_k(t)dt\right)$$

为 Lipschitz 常数的 Lipschitz 条件。从而同前面一样，如取 $W_i(x)=e^{\lambda x}$，对于充分大的 λ，一般常有 $K<1$ 成立。

n 阶常微分方程的初始值問題

$$y^{(n)}=g(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)});\quad y^{(j)}(x_0)=\alpha_j,$$

正如我們所熟知的那样，可以化为一阶微分方程組来求解，所以这里的討論，同样可适用。

2) 双曲型的偏微分方程組的初始值問題 就作为偏微分方程組初始値問題的例子

$$\frac{\partial u}{\partial x}=au+bv+c,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=du+ev+f \tag{18.13}$$

加以考察，此处 $a, b, \cdots, f$ 是已給的 x, y 的函数。

所考虑的初始値問題，是在初始曲綫 $x+y=0$ 上，

$$u(x, y)=v(x, y)=0.$$

对于函数組 $\{u, v\}$，算子 T 的定义为

$$T\{u, v\}=\left\{\int_{\xi=-y}^{x}(au(\xi, y)+bv(\xi, y)+c(\xi, y))d\xi,\right.$$
$$\left.\int_{\eta=-x}^{y}(du(x, \eta)+ev(x, \eta)+f(x, \eta))d\eta\right\}.$$

这样，問題可化为下面的形式：

$$T\{u, v\}=\{u, v\}.$$

在三角形的区域

$$B:\ x+y\geqq 0,\ x\leqq \alpha,\ y\leqq -\beta \quad (\alpha>\beta)$$

上解此問題。

用正値函数 $W(x, y)$，对 $w\equiv\{u, v\}$ 导入距离

$$\|w_1-w_2\|=\max_{B}\left(\frac{|u_1(x, y)-u_2(x, y)|}{W(x, y)},\right.$$
$$\left.\frac{|v_1(x, y)-v_2(x, y)|}{W(x, y)}\right).$$

于是，算子 T 满足下面的 Lipschitz 条件：

$$\|Tw_1-Tw_2\|\leqq K\|w_1-w_2\|,$$

此处，

$$K\leqq\max_{B}\left\{\frac{1}{W(x, y)}\int_{\xi=-y}^{x}(|a(\xi,y)|+|b(\xi,y)|)W(\xi,y)d\xi,\right.$$
$$\left.\frac{1}{W(x, y)}\int_{\eta=-x}^{y}(|d(x,\eta)|+|e(x,\eta)|)W(x,\eta)d\eta\right\}.$$

特别，当 $W(x, y)=e^{L(x+y)}$ 时，

$$K\leqq\max_{B}\left(\frac{|a|+|b|}{L}, \frac{|d|+|e|}{L}\right),$$

从而，选取定数 L 为

$$L > \max_{\beta} (|a| + |b|, |d| + |e|),$$

就有 $K<1$。

§19 对于非綫性微分方程边界值問題的应用

为了简单起见，仅就二次元的边界問題

$$\text{在区域 } G \text{ 内}, \quad L[u] = \varphi(x, y, u), \tag{19.1}$$

$$\text{在边界 } \Gamma \text{ 上}, \quad \gamma[u] = 0 \tag{19.2}$$

加以考察。此处 $L[u]$，$r[u]$ 是綫性微分算子（偏微分的系数也可以是 x, y 的函数），φ 是充分光滑的函数。那么，綫性边界值問題

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在区域 } G \text{ 内}, & L[w] = r(x, y), \\ \text{在边界 } \Gamma \text{ 上}, & \gamma[w] = 0\end{array}\right\} \tag{19.3}$$

对于任意的連續函数 $r(x, y)$，假定是可以解出的。

在此，将算子 T 定义为具有关系式

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在区域 } G \text{ 内}, & L[g] = \varphi(x, y, f), \\ \text{在边界 } \Gamma \text{ 上}, & \gamma[g] = 0\end{array}\right\} \tag{19.4}$$

的 f, g 間的运算

$$g = Tf, \tag{19.5}$$

则所给的問題，可表示为

$$u = Tu.$$

用 $u_{n+1} = Tu_n$，即解

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在区域 } G \text{ 内}, & L[u_{n+1}] = \varphi(x, y, u_n), \\ \text{在边界 } \Gamma \text{ 上}, & \gamma[u_{n+1}] = 0\end{array}\right\} \tag{19.6}$$

的边界值問題，来作近似点列。如 $\varphi(x, y, u)$ 对全体的 $u=u_n$ 有定义，则在綫性边界值問題(19.3)可解的假定下，允許作无限次的逐次近似。

其次，对于任意的

$$(x, y) \in G, \ |u| < M, \ |u^*| < M,$$

假定有

$$|\varphi(x, y, u)-\varphi(x, y, u^*)| \leqq N(x, y)|u-u^*| \quad (19.7)$$

成立。那末,对于 f_1, f_2, 当 $g_1=Tf_1$, $g_2=Tf_2$ 时,就有

$$\left.\begin{aligned} &L[g_1-g_2]=\varphi(x, y, f_1)-\varphi(x, y, f_2),\\ &\gamma[g_1-g_2]=0. \end{aligned}\right\} \quad (19.8)$$

設綫性边界值問題(19.3)的 Green 函数为 $G(x, y; \xi, \eta)$, 則

$$g_1-g_2=\int_G G(x, y; \xi, \eta)[\varphi(\xi, \eta, f_1)-\varphi(\xi, \eta, f_2)]d\xi\, d\eta.$$

所以,

$$|g_1-g_2| \leqq \int_G N(\xi, \eta)|G(x, y; \xi, \eta)| \cdot |f_1-f_2| d\xi\, d\eta.$$

在区域 G 内,取 $W(x,y) \geqq 0$,对于函数 f_1, f_2 用下式导入距离:

$$\|f_1-f_2\|=\sup_{x, y \in G} \frac{|f_1(x, y)-f_2(x, y)|}{W(x, y)}, \quad (19.9)$$

則

$$\|g_1-g_2\| \leqq K\|f_1-f_2\|,$$

其中

$$K=\sup_G \frac{1}{W(x, y)} \int_G N(\xi, \eta)|G(x, y; \xi, \eta)| W(\xi, \eta) d\xi\, d\eta. \quad (19.10)$$

从而, T 是以 K 为 Lipschitz 常数的算子。

在(19.10)中,有的时候,虽然不知道 Green 函数的具体形式,但是也有可能估計 K 的值。譬如 Green 函数在区域 G 内不改变符号,并且固有值問題

$$\text{在 } G \text{ 内},\ L[z]=\lambda z,\ \text{在 } \Gamma \text{ 上},\ \gamma[z]=0 \quad (19.11)$$

具有在区域 G 内不变符号的固有函数 $z_0(x, y)$ (当固有值 $\lambda_0>0$). 此时选取

$$W(x, y)=z_0(x, y),$$

則

$$\int_G G(x, y; \xi, \eta) z_0(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{\lambda_0} z_0(x, y).$$

所以 Lipschitz 常数 K，可以采用

$$K = \frac{N_{\max}}{\lambda_0}. \tag{19.12}$$

注 当边界条件不是 $\gamma[u]=0$，而是 $\gamma[u]=\psi(s)$ 时，考虑 $\gamma[\bar{u}]=\psi(s)$ 的輔助函数 $\bar{u}$，可以毫无改变地应用上面所論述的方法。不过函数 $\bar{u}$ 只是在理論研究上使用，在实际数值計算时，可以不必求出。

例 就 $x^2+y^2=r^2<1$ 的内部为 G，圓周为 Γ，考察

$$\left.\begin{array}{ll} \text{在 } G \text{ 内}, & \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = u^2 + u, \\ \text{在 } \Gamma \text{ 上}, & u = 1 \end{array}\right\}$$

的非綫性微分方程的边界值問題。

滿足边界条件和具有关系式 $\Delta u_1 = u_0^2 + u_0$ 的 u_0，u_1 比較容易找出。設

$$u_1 = 1 + (1-r^2)\left(\alpha - \frac{1+2\alpha}{6} r^2\right),$$

則

$$\Delta u_1 = -4\left\{\alpha + \frac{1+2\alpha}{6}(1-4r^2)\right\}.$$

由上式計算 u_0，得到

$$u_0 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4\Delta u_1}).$$

固有值問題

$$\text{在 } G \text{ 内} \quad \Delta u = \lambda u, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上} \quad u = 0,$$

在 G 内具有不改变符号的解

$$J_0(\sqrt{\lambda}\, r), \quad \lambda = \lambda_0 \fallingdotseq (2.4048)^2.$$

以此解作为 W，則有

$$W(x, y) = J_0(\sqrt{\lambda}\, r).$$

取完备的子空間 F

$$\text{在 } 0 \leqq x^2+y^2 \leqq 1 \text{ 上連續，有 } 0 \leqq u(x, y) \leqq 1$$

的函数 $u(x, y)$ 的全体，則

$$N_{\max} = (1+2u)_{\max} = 3,$$

从而，由(19.12)，Lipschitz 常数 K 为

$$K=\frac{3}{\lambda}<1.$$

現在这样选取 a，使 u_0, u_1 在 $r=0$ 时一致，則

$$a=-\frac{1}{3}, \quad u_0=u_1=\frac{2}{3} \quad (r=0).$$

計算 u_0, u_1 的距离 $\|u_0-u_1\|$ 得

$$\|u_0-u_1\|=\sup\frac{|u_0-u_1|}{J_0(\sqrt{\lambda}\,r)}\approx 0.15.$$

一般对于球 S 为

$$\|u-u_1\|\leqq\frac{K}{1-K}\|u_0-u_1\|\leqq 0.161,$$

或是

$$|u-u_1|\leqq 0.161 J_0(\sqrt{\lambda}\,r).$$

因为球 S 属于 F，所以說明在 S 內存在唯一的解 u。根据上式，进一步可得

$$u(0,\,0)=\left(\frac{2}{3}\right)\pm 0.161.$$

这个估計是比較粗糙的，如果利用問題的单調性，可使其更加精确。就是对于在 Γ 上等于 1 的函数 v，考虑算子

$$Tv=-\varDelta v+v+v^2,$$

在 G 內很明显成立着下列单調关系：

$$\text{若 } Tv\geqq Tu=0,\ \text{則 } v\geqq u,$$

$$\text{若 } Tv\leqq Tu=0,\ \text{則 } v\leqq u.$$

由于前面所选的 u_0, u_1 具有性质 $u_1\leqq u_0$，所以根据

$$Tu_1=-\varDelta u_1+u_1+u_1^2\leqq-\varDelta u_1+u_0+u_0^2=0,$$

得到

$$Tu_1\leqq 0,\ u_1\leqq u.$$

上式的 u_1 給出解 u 的下限。

为了导出上限，利用关系式

$$\bar{u}_1=1-(1-r^2)[0.32+0.05r^2+0.006r^4],$$

从 $\bar{u}_0+\bar{u}_0^2=\varDelta\bar{u}_1$ 定义 $\bar{u}_0$，則成立着不等式 $\bar{u}_1\geqq\bar{u}_0$。用与上面同样的論証。由

$$T\bar{u}_1\geqq 0,\ \text{得 } \bar{u}_1\geqq u,$$

从上面的論述，对 $u(0,\,0)$ 可得出下面的估計值：

$$0.6666<u_1(0,\,0)\leqq u(0,\,0)\leqq\bar{u}_1(0,\,0)<0.6800.$$

§20 一般化的 Newton 法

当 x 为实数，已知方程 $f(x)=0$ 的根的近似值为 x_0 时，可根据

$$x_1=x_0-[f'(x_0)]^{-1}\cdot f(x_0) \tag{20.1}$$

得出根的較好的近似值 x_1，这种方法称为 Newton 法。可以把这种方法推广到一般函数空間的方程上去。

設 X, Z 是两个綫性賦范空間，求由 X 到 Z 的非綫性算子为

$$z=P(x) \quad (x\in X,\ z\in Z) \tag{20.2}$$

的方程

$$P(x)=0 \tag{20.3}$$

的解。

所謂已知根的近似值 x_0，是指

$$x_0\in X,\ \|P(x_0)\| \text{ 充分小.} \tag{20.4}$$

那么，在此假定算子 $P(x)$，具有下面性质：有从 X 到 Z 的有界定綫性算子 H，对属于 X 的閉球 F

$$F:\ \|x-x_0\|\leqq\varepsilon \tag{20.5}$$

的任意 x, y，有不等式

$$\|P(x)-P(y)-H(x-y)\|<k\|x-y\| \tag{20.6}$$

成立，此处 k 是常数。

如果 $P(x)$ 在点 $x=x_0$ 在 Frechet 意义下可微，取 $H=P'(x_0)$，則对于充分小的 ε，有(20.6)成立，且当 $\varepsilon\to0$ 时，則有 $k\to0$.

現在，将逆算子 H^{-1} 定义为 Z 的全体，且假定是有界的，卽

$$\|H^{-1}\|\leqq B, \tag{20.7}$$

則方程 $P(x)=0$ 可写为

$$x=x-H^{-1}\cdot P(x). \tag{20.8}$$

于是，按从 X 到 X 的算子 T 定义为

$$Tx=x-H^{-1}\cdot P(x), \tag{20.9}$$

故得

$$x = Tx. \tag{20.10}$$

将算子 T 看作是闭球 F 的算子，根据条件(20.6)，它将满足 Lipschitz 条件，事实上，对于任意的 x, $y \in F$,

$$P(x) - P(y) = H(x-y) + R(x, y) \tag{20.11}$$

依(20.6)，则

$$\|R(x, y)\| < k\|x-y\|. \tag{20.12}$$

从

$$\begin{aligned} Tx - Ty &= x - y - H^{-1}[P(x) - P(y)] \\ &= x - y - H^{-1}[H(x-y) + R(x, y)] \\ &= -H^{-1} \cdot R(x, y), \end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &= \|H^{-1} \cdot R(x, y)\| \leq \|H^{-1}\| \cdot \|R(x, y)\| \\ &\leq kB\|x-y\|. \end{aligned}$$

从而，可取 Lipschitz 常数 K 为

$$K = kB. \tag{20.13}$$

一般当 ε 充分小时，k 也随之变小，因之可使

$$K = kB < 1. \tag{20.14}$$

那么，应用 T，以 x_0 为初始值，用

$$x_{n+1} = Tx_n \tag{20.15}$$

作为逐次近似数列，则

$$x_1 = x_0 - H^{-1} \cdot P(x_0). \tag{20.16}$$

如前式(20.4)，假定对于充分小的 η，有不等式

$$\|P(x_0)\| < \eta \tag{20.17}$$

成立，即

$$\|x_1 - x_0\| = \|H^{-1} \cdot P(x_0)\| < B\eta. \tag{20.18}$$

因此，一般对于球 S，有

$$\|x-x_1\| \leqq \frac{K}{1-K}\|x_1-x_0\| < \frac{k\eta B^2}{1-kB} \qquad (20.19)$$

成立。如果 $k\eta B^2$ 充分小，則它含于閉球 F 中。这样球 S 內存在一个唯一的根，并能保証逐次近似点列收斂于此根。

由于篇幅所限，对具体問題，如对于非綫性积分方程应用等問題，在此就不作介紹了[1]。

---

[1] Newton 法比 §16 中所述的逐次近似方法有更精密的結果，关于它的理論和应用，可参看 Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах (Физматгиз, 1959) 一书第十八章。——校者注

第 4 章　变分法近似解法

§21　一般說明

1）**方法說明**　作为简单的例子，考虑下面的偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y), \tag{21.1}$$

此处，$u(x, y)$ 是所求的函数，$f(x, y)$ 为已知函数，都定义在区域 G 内，并要求在 G 的边界上，具有边界条件

$$u=0. \tag{21.2}$$

这是一个普通的边界值問題，它有各种解法，本书已經作了一些介紹，以下是将(21.1)变为变分法問題中的 Euler 方程而加以处理。变分法問題，正象在本丛书《变分法及其应用》(例如 §30) 里所指出的那样，是使泛函

$$J[u]=\int_G (u_x^2+u_y^2+2fu)\,dx\,dy \tag{21.3}$$

为最小的問題$\left(\text{此处 } u_x=\frac{\partial u}{\partial x}\right)$. 但作 $J[u]$ 时所允許的函数 u，必須滿足边界条件(21.2)．这个变分問題的解和(21.1)的解是等价的❶。为了求出使 J 为最小值的函数 $u=\bar{u}$，則可得到 (21.1) 的解。

了解了上述关系后能起什么作用呢？为了得到 $J[u]$ 的最小值，以(21.1)作为問題的出发点，应該建立 Euler 方程。但是考慮了上面的說法后，可以不用 Euler 方程，而直接地找出使(21.3)为

---

❶ 严格地說，当 (21.1) 解存在时，变分問題的解与(31.1)的解是等价的。但若(21.1)通常意义的解不存在时，在更广的函数类上，变分問題仍有解存在。可参看 С. Г. Михлин, Вариационные Методы в Математической Физике, Москва 1957.——校者注

最小函数 $\bar{u}$ 的方法(变分法的直接解法)。

使(21.3)为最小的函数 $\bar{u}$ 的求法,正象下面所考虑的那样,一般是不容易的(它的存在性也不很明显),但是在(21.3)中,至少有下限 d (这一点很容易証明),因而存在着函数列 $\{u_n\}$, 使

$$J[u_n]\to d, \quad 当\ n\to\infty, \tag{21.4}$$

这种函数列叫作关于 J 的**极小化序列**(minimizing sequence)。对于 $\{u_n\}$, 如果有函数 $\bar{u}$, 使

$$u_n\to\bar{u}, \quad 当\ n\to\infty, \tag{21.5}$$

则 $\bar{u}$ 为 J 的最小值, 因而它亦是(21.1)的解。所以,当 n 相当大时, u_n 就可作为解 $\bar{u}$ 的近似函数。

在上面所考虑的变分法的基本方法中, 还有很多理論和实际問題有待进一步研究。首先就是极小化序列如何作的問題。一般并不知道 $J[u]$ 的下限 d 的值,另一方面,也不容易判定函数列 $\{u_n\}$ 是否为极小化序列,亦不容易知道所获得的极小化序列是否收斂。因此,所要求的 $\{u_n\}$ 必須是"好的"极小化序列,但究竟"好的"极小化序列如何作法,这就是需要解决的問題。而且在实际計算中,必須在 n 不太大的情况下, 就允許采用 u_n 作为 $\bar{u}$ 的近似函数, 且使誤差很小。如此一系列的問題,将在下节加以叙述。

2) **注意事项** 对变分方法須注意以下几点。

与所給微分方程等价的变分問題不止一个。例如 (21.1), 除了(21.3)外,使泛函

$$J_1[u]=\int_G (u_{xx}+u_{yy}-f)^2\,dx\,dy \tag{21.6}$$

为最小値問題,也和所給的微分方程等价。关于 J_1 的 Euler 方程虽然不是 (21.1) 的形状, 但是一般有 $J_1[u]\geq 0$, 当 $u=\bar{u}$ 时, $J_1[u]=0$, 所以很明显 $\bar{u}$ 是 J_1 的最小函数。从这个例子可以看出,(21.6)比(21.3)复杂,所以在实际計算中使用(21.6)是不方便

的。因此，一个微分方程究竟对应那个变分問題，必須进行选擇。选擇的标准，主要是根据問題的性质和要求来确定。

特别应当提出的是，将所給問題变为泛函 $J[u]$ 的变分問題时，必須注意 $J[u]$ 的最小值 $J[\bar{u}]$ 所表示的意义。因为有时 $J[\bar{u}]$ 的値无意义，有时就是所求的量。例如(21.1)当 f 是常数时，相当于在具有均匀張力的鼓膜面的垂直方向作用了压强为 f 的压力后，确定变位 $u(x, y)$ 的微分方程。此时，假設由于膜的变位而引起鼓的內部容积的变化为 V，則有关系式 $V=J[\bar{u}]/f$，$J[\bar{u}]$ 有确定的物理意义。如果求出 $\bar{u}$，就可計算出 V. 但是若以求 V 为主要目的时，也可以不必求出 $\bar{u}$，比較容易地求出 V 的近似值。

求泛函 $J[u]$ 的最小值 $J[\bar{u}]$，比求最小函数 $\bar{u}$ 容易，而且有較高的准确度，这在变分法部分中(第 6 章)有詳細地說明(在上述情况下，根据逆定理可估計 $J[\bar{u}]$ 的上，下界)。

在实际問題中，如果所求的不但是微分方程的解 $\bar{u}$，同时也要求由 $\bar{u}$ 所确定的某个量 Q 时，最好寻求这样的泛函 J，使 $J[u]$ 的最小值，恰好等于 Q，并且給出最小值 u 恰好就是 $\bar{u}$. 这样处理变分法問題是方便的。当然使用逆定理較好，但是不使用逆定理有时也可求得較好的近似值(«变分法及其应用» §66)。

另外，也要注意到近似函数 u 的准确度，較 $J[\bar{u}]$ 近似值 $J[u]$ 的准确度低。后者的誤差为 $u-\bar{u}$ 的高級无穷小。

3) **边界条件** 最后說明一下变分法和边界条件之間的关系。在上面的例子中，方程(21.1)要求的是第一种边界条件(21.2)，这时对应的变分問題，也同样以(21.2)为边界条件。如果代替(21.2)是第二种或第三种边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\rho u+\sigma=0 \quad (n \text{ 是外向法綫}), \tag{21.7}$$

則泛函为

$$J[u]=\int_{\Omega}(u_x^2+u_y^2+2fu)\,dx\,dy+\int_{\Gamma}(\rho u^2+2\sigma u)\,ds \quad (21.8)$$

(s 是 Γ 上弧長),就不要边界条件了。这时(21.7)成为"自然边界条件",即虽然对 J 沒有要求,但是最小函数 $\bar{u}$ 必須滿足这种条件(«变分法及其应用» §29)。因此,变分法問題在不考虑边界条件(21.7)的情况下,可使問題簡单化。为了使近似函数 u 是 $\bar{u}$ 較好的近似函数,u 必須近似的滿足条件(21.7)。

另外,如同一問題所对应的变分問題改变时,上面所說的事实可能不一定成立。譬如用泛函数(21.6)代替(21.8),那么,容許函数就要求滿足边界条件(21.7)。

§22 Ritz 方法 I

1) 方法說明 近似地解使泛函 $J[u]$ 在附加条件 B 下(譬如边界条件)为最小的問題,也就是說,在对 $J[u]$ 作极小化序列时,常使用下述的 Ritz 法。这个方法,就是从滿足附加条件 B,含有 n 个参数——$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的函数族

$$u=\Phi_n(x,\ y,\ \cdots;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \quad (22.1)$$

中,选定使 $J[u]$ 的值为最小的函数作为近似函数。

将(22.1)代入 $J[u]$ 中,因为 Φ_n 已决定,所以 $J[u]$ 成为参数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的函数,因此,从解

$$\frac{\partial J}{\partial a_i}=0 \quad (22.2)$$

可得出 a_i,使 $J[u]$ 为最小。

如果边界条件是齐次綫性时,最好是适当地确定容許函数列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$,使

$$u_n=\Phi_n=a_1\varphi_1+\cdots+a_n\varphi_n. \quad (22.3)$$

这个方法,特别是当 $J[u]$ 为 u 的二次式时,最为便利。此时,将 J

的二次，一次，0 次的同次项分开，置

$$J[u]=J_2[u]+2J_1[u]+J_0, \tag{22.4}$$

则得 a_k 的二次式

$$J[u_n]=\sum_{i,k=1}^{n} a_i a_k J_2[\varphi_i, \varphi_k]+2\sum_{k=1}^{n} a_k J_1[\varphi_k]+J_0 \tag{22.5}$$

此处 $J_2[u, v]$ 是关于二次形式 $J_2[u]$ 的极式(双一次形式)。例如对于(21.3)有

$$J_2[u]=\int (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy, \quad J_2[u, v]=\int (u_x v_x+u_y v_y)\,dx\,dy,$$

$$J_1[u]=\int fu\,dx\,dy.$$

对于(22.5)，求作(22.2)，得到下列方程組：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k J_2[\varphi_i, \varphi_k]+J_1[\varphi_i]=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n). \tag{22.6}$$

为此目的所用的函数 (22.1)，称为**試驗函数** (trial function)，函数(22.3)称为綫性試驗函数，$\{\varphi_k\}$ 称为它的基底。

要想使上面所确定的 $\{u_n\}$ 为极小化序列，那末基底 $\{\varphi_k\}$ 必須滿足某些条件。例如当

$$J[u]=\iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy \quad (G\text{ 是有界区域})$$

时，函数族 (22.1) 本身及其偏导数分别一致追近于解 $\bar{u}$ 及其导数 $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$, 就充分了。

2) **基底的选定** 假設和一个二阶常微分方程相关的泛函形式为

$$J[u]=\int_a^b F(x, u, u')\,dx, \tag{22.7}$$

其区間是有界的。为确定起見，不妨取区間为[0,1]. F 是正则函数，解 $u=\bar{u}$ 連續可微。

根据 Weierstrass 的(扩充的)追近定理。在閉区間 [0, 1] 上

具有連續导数的任意函数 $u(x)$，能找到多項式或三角多項式，使它本身和它的导数分别迫近給定的函数和它的导数。也就是說，对于任意的 $\varepsilon>0$，取适当的(三角)多項式 P_n，成立着不等式

$$|u(x)-P_n(x)|<\varepsilon, \quad |u'(x)-P'_n(x)|<\varepsilon. \qquad (22.8)$$

所以沒有边界条件的变分問題，可取基底

$$\varphi_k=x^k \quad (k=0, 1, 2, \cdots). \qquad (22.9)$$

另外，对于第一种边界条件 $u(0)=u(1)=0$，可以証明，取基底为

$$\varphi_k=x(1-x)x^k \text{ 或者 } \varphi_k=\sin k\pi x \qquad (22.10)$$

最为合适。对于第二种和第三种边界条件，变分問題一般是不要边界条件(如上所述)的，如果根据問題，要想使試驗函数滿足边界条件，則根据边界条件，其基底可用

$$u'(0)=u'(1)=0: \ \varphi_0=1, \ \varphi_1=2x^3-3x^2,$$
$$\varphi_k=(1-x)^2x^k \quad (k\geqq 2), \qquad (22.11)$$

或者

$$\varphi_k=\cos k\pi x. \qquad (22.12)$$

$$u'(0)-h_0u(0)=0, \ u'(1)+h_1u(1)=0:$$
$$\varphi_0=x^2\left(x-1-\frac{1}{2+h_1}\right), \ \varphi_1=(1-x)^2\left(x+\frac{1}{2+h_0}\right),$$
$$\varphi_k=x^k(1-x)^2 \quad (k\geqq 2). \qquad (22.13)$$

对于偏微分方程，在多数情况下，取多項式作为試驗函数比較便利，特别对于 Laplace 方程第一种边界条件問題(21.1)，应用变分法(21.3)时，若是存在着一个函数 ω，它在 $G+\Gamma$ 上連續，在 G 內 $\omega(x, y)>0$，在 Γ 上 $\omega=0$，而且在 G 上 ω_x, ω_y 連續有界，那末可以証明，基底取

$$\varphi_0=\omega, \ \varphi_1=x\omega, \ \varphi_2=y\omega, \ \varphi_3=x^2\omega, \ \cdots, \qquad (22.14)$$

則(21.4)成立。

3) **与 Galerkin 方法的关系** 一般近似地解函数方程

$$L[u]=0 \tag{22.15}$$

时，与 Ritz 方法同样，将 u_n 取形如(22.3)的函数，由

$$(L[u_n],\ \varphi_i)=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{22.16}$$

确定系数 a_n 的方法，称为 Galerkin 方法。括号(,)叫做內积，对于两个自变数 x, y 的函数空間中它的定义是 $(u,\ v)=\int uv\,dx\,dy$. 若选擇了适当的完备系为基底 $\{\varphi_k\}$，可认为 $u_n\to\bar{u}$ ($\bar{u}$ 为正确解).

若(22.15)是綫性的，并且适用 Ritz 方法时，则 Galerkin 方法与 Ritz 方法是一致的❶。因为将(22.15)分成 u 的同次的一次部分和 0 次部分，写为

$$L_1[u]+f=0,$$

则(22.16)为

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(L_1[\varphi_k],\ \varphi_i)+(f,\ \varphi_i)=0. \tag{22.17}$$

当 $L[u]=0$ 是泛函(22.4)的 Euler 方程时，

$$J_2[\varphi_i,\ \varphi_k]=(L_1[\varphi_k],\ \varphi_i),\quad J_1[\varphi_i]=(f,\ \varphi_i),$$

因而(22.17)与(22.16)一致。

但是这两个方法还有区别。第一，在形式上，系数 $J_2[\varphi_i,\ \varphi_k]$ 和 $(L[\varphi_k],\ \varphi_i)$ 不同。例如在(21.1)問題中，假定第一种边界条件为(21.2)，则

$$J_2[\varphi_i,\ \varphi_k]=\int(\operatorname{grad}\varphi_i,\ \operatorname{grad}\varphi_k)\,dx\,dy,$$

$$(L_1[\varphi_k],\ \varphi_i)=-\int\varphi_i\Delta\varphi_k\,dx\,dy.$$

第二，对自然边界条件时，Ritz 方法可以不考虑边界条件，但 Galerkin 方法必須满足基底 φ_k 的边界条件(因为 Galerkin 方法，本质上与变分法无关)。第三，Galerkin 方法对于不能从变分法

❶ 当算子 L_1 是对称正定时，两方法才恒为一致。在这时候适当选取 $\{\varphi_k\}$，Ritz 方法亦恒收敛，因此这里所指“Ritz 方法适用的情况”，应該是这一情况。——校者注

导出的方程,在形式上可以适用,但是其数学根据不十分明确。

例 1 对于边界条件为 $u(1)=u(2)=0$ 的方程

$$xu''+u'+\frac{x^2-1}{x}u+x^2=0,$$

取 $$\varphi_1=(x-1)(2-x);\quad u_1=a_1\varphi_1,$$

不論 Ritz 方法或 Galerkin 方法,都得到同一結果,決定 a_1 的方程为

$$\int_1^2\left[-2a_1x+(3-2x)a_1+\frac{x^2-1}{x}(x-1)(2-x)a_1+x^2\right](x-1)(2-x)dx=0.$$

解之,得 $a_1=0.8110$.

用 Bessel 函数, $\bar{u}$ 的正确解是

$$\bar{u}(x)=3.6072I_1(x)+0.75195Y_1(x)-x,$$

$$u_1(1.5)=0.2027,\quad \bar{u}(1.5)=0.2026.$$

所以这个問題只用一个参数就能得到較准确的近似值。

例 2 考察边界条件为 $u(0)=4$, $u(1)=1$ 的非綫性微分方程

$$u''=\frac{3}{2}u^2.$$

其变分問題是

$$J[u]=\int_0^1(u'^2+u^3)dx=\text{Extremum},$$

$$u(0)=4,\quad u(1)=1.$$

采用試驗函数

$$u_2=4-3x+a_1(x-x^2)+a_2(x-x^3),$$

根据(22.3),由下列式子确定 a_1, a_2:

$$\frac{\partial J}{\partial a_1}=\int_0^1[2u_2'(1-2x)+3u_2^2(x-x^2)]dx=0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_2}=\int_0^1[2u_2'(1-3x^2)+3u_2^2(x-x^3)]dx=0.$$

或具体写为

$$\begin{cases}1407-490a_1+726a_2+9a_1^2+27a_1a_2+\dfrac{41}{2}a_2^2=0,\\[2mm] 1302+484a_1+750a_2+9a_1^2+\dfrac{82}{3}a_1a_2+21a_2^2=0\end{cases}$$

(因問題为非綫性,故得二次方程組). 解之,得两組解

$$\begin{cases}a_1=-7.07004,\\ a_2=2.72044;\end{cases}\qquad \begin{cases}a_1=-32.20,\\ a_2=-12.60.\end{cases}$$

原方程对应的初等解

$$\bar{u}(x)=\frac{4}{(1+x)^2},$$

用 a_1, a_2 作近似函数 u_2, 得

$$u_2(0.5)=1.7627,\ 但\ \bar{u}(0.5)=1.7778,$$

故得誤差約为 1% .

若試驗将后者用椭圓函数表示,可得另一近似解。

§ 23 Ritz 方法 II(函数值的收斂性)

1) 常微分方程 边值問題

$$(pu')'-qu=f \quad (p>0,\ q\geqq 0), \tag{23.1}$$

$$u(0)=u(l)=0, \tag{23.2}$$

和求满足边界条件(23.2)的函数 $u(x)$, 使

$$J[u]=\int_0^l [pu'^2+qu^2+2fu]\,dx \tag{23.3}$$

为最小的变分問題是等价的。

此时,若 Ritz 方法的近似函数列 u_n 为极小化序列(§ 21), 则 u_n 收斂于正确解 $\bar{u}$, 即

$$\lim J[u_n]=J[\bar{u}],\ \lim u_n=\bar{u}. \tag{23.4}$$

因为,由于 $\bar{u}$ 满足(23.1), $\bar{u}$, u_n 满足(23.2), 所以

$$J[u_n]-J[\bar{u}]=\int_0^l [p(u_n'-\bar{u}')^2+q(u_n-\bar{u})^2]\,dx.$$

假定 $p(x)>0$, $q(x)\geqq 0$, 则

$$\int_0^l \left[\frac{d}{dx}(u_n-\bar{u})\right]^2 dx \leqq \frac{1}{\min p}(J[u_n]-J[\bar{u}]).$$

$$|u_n-\bar{u}|=\left|\int_0^x \frac{d}{dx}(u_n-\bar{u})\,dx\right|$$

$$\leqq\left\{\int_0^x\left[\frac{d}{dx}(u_n-\bar{u})\right]^2 dx\cdot\int_0^x 1^2\cdot dx\right\}^{1/2}$$

$$\leqq\frac{l^{1/2}}{\min p^{1/2}}\sqrt{J[u_n]-J[\bar{u}]}.$$

所以，u_n 一致收斂于 $\bar{u}$.

另外，只用已知的量，也可估計 u_n 的誤差。我們用下面例子来說明。如在区間 $[0, 1]$ 上，$p(x)\equiv 1$，用三角函数系 $\varphi_k=\sqrt{2}\sin kx$ 作为基底，令 $q_0=\max q$，則

$$|\bar{u}-u_n|\leq\frac{\sqrt{2}\,q_0^{1/2}}{\pi^{3/2}(n+1)^{3/2}}\left\{1+\frac{q_0}{4\sqrt{6}\pi(n+1)}\left(1+\frac{4\sqrt{2}}{\pi^2 n^{3/2}}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(1-\frac{q_0}{\pi^2(n+1)^2}\right)^{-1}\right\}\cdot\left[\int_0^1\frac{f^2}{q}\,dx\right]^{1/2}. \qquad (23.5)$$

因而

$$|\bar{u}-u_n|=O(n^{-3/2}). \qquad (23.6)$$

再設 $\bar{u}$ 的 Fourier 展开式第 n 項部分和为 U_n，則 u_n 和 U_n 以相同的程度趋近于 $\bar{u}$，亦即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max|\bar{u}-u_n|}{\max|\bar{u}-U_n|}=1. \qquad (23.7)$$

2) 偏微分方程 对于偏微分方程的情形，极小化序列不一定收斂于其解，也就是說，(23.4)一般是不成立的。

現在就(21.1)，(21.2)的問題說明一下极小化序列 $\{u_n\}$ 收斂于 $\bar{u}$ 的充分条件(証明从略)。設 G 的边界 Γ 相当光滑，f 是正則的，則解 $\bar{u}$ 滿足下列条件：即当两点 (x,α)、(x,β) 連結的綫段在 G 内时，

$$\int_\alpha^\beta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy\leq K_0\ (\text{常数}). \qquad (23.8)$$

此时，存在着 $J[u]$ 的极小化序列 $\{u_n\}$，使得

$$J[u_n]-J[\bar{u}]=\varepsilon_n\to 0.$$

当

$$\int_\alpha^\beta\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 dy\leq K_n,\quad \varepsilon_n\log K_n\to 0 \qquad (23.9)$$

时，

$$|u_n-\bar{u}|=O\left(\varepsilon_n^{1/2}+\left|\varepsilon_n\log\frac{K_n+K_0}{\varepsilon_n}\right|^{1/2}\right), \qquad (23.10)$$

即

$$u_n \to \bar{u}.$$

特別地，若采用

$$u_n(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_n(x)y^n \qquad (23.11)$$

为近似解以代替(23.9)，当条件

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n \log n = 0 \qquad (23.12)$$

成立时，則得到下面的結論：

$$|\bar{u} - u_n| = O\left(\sqrt{\varepsilon_n \log \frac{n}{\varepsilon_n}}\right). \qquad (23.13)$$

在使用这样的定理时，在一定程度上需要預先知道有关解 $\bar{u}$ 的性质(23.8)。

§ 24 固有值的近似計算

1) **固有值的最大最小性** 将微分方程变为变分問題，有时泛函的逗留值本身成为有兴趣的量，譬如固有值問題就是一个例子。在固有值的近似計算时，較好的办法是将問題化成从逗留值能給出固有值的变分問題（«变分法及其应用» § 30, § 69）。例如自共軛的二阶偏微分方程的固有值問題

$$\begin{cases} \text{在区域 } G \text{ 内,} \\ \qquad L[u] + \lambda \rho u = (pu_x)_x + (pu_y)_y - qu + \lambda \rho u = 0 \\ \qquad\qquad (p > 0,\ \rho > 0), & (24.1) \\ \text{在边界 } \Gamma \text{ 上,} \\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0. & (24.2) \end{cases}$$

对于下标为 n 的固有值 λ_n，用泛函

$$J[u] = \iint_G [p(u_x^2 + u_y^2) + qu^2]\, dx\, dy + \int_\Gamma p\sigma u^2 ds, \qquad (24.3)$$

$$K[u]=\iint_G \rho u^2\,dx\,dy \tag{24.4}$$

时，具有这样的性质：

$$\lambda_n=\max_{\psi_i}\left\{\min_u \frac{J[u]}{K[u]}\right\}, \tag{24.5}$$

但

$$K[u,\ \psi_i]=\iint_G \rho u\psi_i dx\,dy=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1). \tag{24.6}$$

上述的意义是首先确定任意函数 $\psi_1,\ \psi_2,\ \cdots,\ \psi_{n-1}$，变动满足条件(24.6)的函数 u，使 $J[u]/K[u]$ 取最小值，这个最小值一般是 ψ_i 的泛函，再变动 ψ_i 取其最大值，则与 λ_n 相等（《变分法及其应用》§69）。特别是对于最小的固有值 λ_1，

$$\lambda_1=\min\frac{J[u]}{K[u]} \quad (u\text{ 为任意}). \tag{24.7}$$

依据第一种边界条件

在边界 Γ 上，

$$u=0 \tag{24.8}$$

所以，u 也附有同一边界条件。

利用这个性质，可得出第一种边界条件的最小固有值 λ_1 在区域 G 内有一定的单调性，即

$$\text{当 } G'\subset G\subset G''\text{ 时，}\lambda_1'\geqq\lambda_1\geqq\lambda_1''. \tag{24.9}$$

設在 G' 內 λ_1' 的固有函数为 u_1'，

$$\text{在 } G \text{ 内 } u=u_1',\quad \text{在 } G-G' \text{ 内}\quad u=0.$$

对于函数 u，由于(24.7)，則成立着

$$\lambda_1'=\frac{J_{G'}[u]}{K_{G'}[u]}=\frac{J_G[u]}{K_G[u]}\geqq\lambda_1. \tag{24.10}$$

根据类似地考察，可得出固有値对边界条件的依賴性以及固有値分布等有关性质。詳細論証，在此省略。

Sturm-Liouville 方程的固有値問題

$$(pu')'-qu+\lambda\rho u=0 \quad (p>0,\ q>0), \tag{24.11}$$

$$u'(a)-h_1u(a)=u'(b)+h_2u(b)=0. \tag{24.12}$$

由(24.5), (24.6), 令

$$J[u]=\int_a^b [pu'^2+qu^2]\,dx+h_1p(a)u(a)^2+h_2p(b)u(b)^2, \tag{24.13}$$

$$K[u]=\int_a^b \rho u^2\,dx;\quad K[u,\ \psi_i]=\int_a^b \rho u\,\psi_i\,dx. \tag{24.14}$$

例

$$u''+\lambda\frac{e^{-x}}{x}u=0,\ 0<x<\infty,\ u(0)=0,\ u(\infty)\text{有限}. \tag{1}$$

这是个量子力学問題，就是問，在湯川势的作用下，为了恰好存在能量为 0 的穩定状态，应該如何决定势的强度。

由于

$$\lambda_1=\min\left[\int_0^\infty u'^2\,dx\Big/\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}u^2dx\right]$$

采用 u 为

$$u(x)=1-e^{-px}\quad (u(0)=0,\ u(\infty)=1). \tag{2}$$

λ_1 的近似値是

$$\lambda_1\leqq p\Big/2\log\frac{(p+1)^2}{2p+1}. \tag{3}$$

适当选擇 p，可使右边尽可能的小。譬如取 $p=1.5$，則

$$\lambda_1\leqq 1.6804 \tag{4}$$

就非常接近准确値 1.6800，这个結果是比較精确的[参照本节 3) 的例子]。

2) 固有値問題的 Rayleigh-Ritz 方法 将綫性試驗函数 (22.3) 代入 $J[u]/K[u]$，就得到两个 n 个变数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 的二次形式的比

$$\frac{J[u_n]}{K[u_n]}=\frac{\sum A_{ik}a_ia_k}{\sum B_{ik}a_ia_k}, \tag{24.15}$$

分母是正定型。要使其最小，产生了固有值問題

$$\sum (A_{ik}-\lambda^{(n)}B_{ik})a_k=0. \tag{24.16}$$

由此，可确定固有值

$$\lambda_1^{(n)}\leqq\lambda_2^{(n)}\leqq\cdots\leqq\lambda_n^{(n)} \tag{24.17}$$

($\lambda_1^{(n)}$是(24.15)的最小值)。

从(24.5)的性质，成立着

$$\lambda_i\leqq\lambda_i^{(n)}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{24.18}$$

即 $\lambda_i^{(n)}$ 給出 λ_i 的上界。当参数的 n 愈大，由 $\lambda_i^{(n)}$ 給出的近似值愈好。当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_i^{(n)}$ 是否趋近于 λ_i，要看基底 $\{\varphi_n\}$ 的性质而定。例如(24.3)中，如果要求第一种边界条件(24.8)，函数 p, q 等正則，可取(22.14)的函数作为基底。一般对于形式为(24.15)的問題，假設眞的固有值函数 $\bar{u}$，可以用基底函数的綫性組合 w_ν，在

$$J[w_\nu-\bar{u}]\to 0,\quad K[w_\nu-\bar{u}]\to 0 \tag{24.19}$$

的意义下任意准确逼近的話，则 $\lambda_i^{(n)}\to\lambda_{(i)}$ 成立。

在第二、三种边界条件时，如以前所述，变分問題是不用边界条件的。这是变分方法，特别是 Rayleigh-Ritz 方法的优点。此时，由于正确解滿足边界条件，所以可得出基底函数近似地滿足边界条件，但一般計算上比較困难，有时出現比較不正确的結果，所以不經常使用。

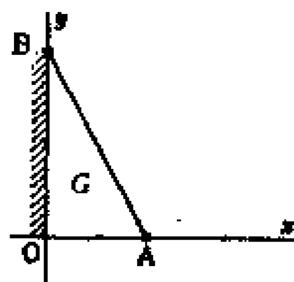


图 24.1

例 三角形翼的振动。

如图 24.1，固定直角三角形的一边 OB，当其他边自由振动时，求基本振动数的近似值(上界)。

假定 Poisson 比为 μ，且

$$J[u]=\iint_G[\mu(\Delta u)^2+(1-\mu)u_{xx}^2+(1-\mu)u_{yy}^2+2(1-\mu)u_{xy}^2]\,dx\,dy,$$

$$K[u]=\iint_G u^2\,dx\,dy,$$

则問題成为求在 OB 上滿足条件 $u=0$, $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ 的函数 u，使 $I[u]=\frac{J[u]}{K[u]}$ 为最小。另二边 OA, AB 是自由的，当然有复杂的边界条件(自然边界条

件)，故变分問題可以不考慮。

以下取

$$OA=1,\ OB=2,\ \mu=0.25.$$

試驗函数取簡单多項式，选擇参数——使 $I[u]$ 的值为最小，計算結果为

$$u_1=x^2(a_1+a_2x);\qquad \frac{a_2}{a_1}=-\frac{3}{8};\qquad I[u_1]=51.3.$$

$$u_2=x^2(a_2+a_2x+a_3y);\ \frac{a_2}{a_1}=-0.37,\ \frac{a_3}{a_1}=-0.41;\ I[u_2]=34.8.$$

与試驗值比較，$\lambda_1\leqq 34.8$ 是当試驗函数簡单时較好的近似值（振动数与 $\sqrt{\lambda_1}$ 成比例）。

3) 固有值的上下界 普通的变分法能求出固有值的上界，但不能求出下界。关于求下界的方法，可以从各方面来考慮，本节主要应用变分法中(§70)指出的方法来研究。

把所考慮的固有值問題，写成 $Au=\lambda Bu$ 的形式，A, B 为对称算子。如在同节所述，当对于某个 u 为

$$I[u]=\frac{(u,\ Au)}{(u,\ Bu)},\quad \varepsilon^2=\frac{(Au,\ B^{-1}Au)}{(u,\ Bu)}-I[u]^2,\tag{24.20}$$

$$\lambda_{i-1}<I[u]<\lambda_{i+1}\tag{24.21}$$

时，则下式成立：

$$I[u]-\frac{\varepsilon^2}{\lambda_{i+1}-I[u]}\leqq\lambda_i\leqq I[u]+\frac{\varepsilon^2}{I[u]-\lambda_{i-1}}\tag{24.22}$$

(为了方便起見記号有些改变)，此处要特別注意的是边界条件。譬如，当要求算子 A 为自然边界条件时，u 也必須滿足它。这与 Rayleigh-Ritz 方法可以不考慮边界条件不同。如計算板的振动問題就有很大麻煩。但是为了求下界，这些过程是不可避免的。

例 再考慮湯川势問題(本节的 1) 中之例)，$A=-\frac{d^2}{dx^2}$, $B=\frac{e^{-x}}{x}$. 取(2)为 u, 可算出 $I[u]$[(3)的右边]. 又由

$$(Au,\ B^{-1}Au)=\int_0^x xe^x u''^2\,dx=\frac{p^4}{(2p-1)^2}\tag{5}$$

(其中 $2p>1$)，得出

$$\varepsilon^2=\frac{p^4}{(2p-1)^2\log\frac{(p+1)^2}{2p+1}}-\frac{p^2}{4\left[\log\frac{(p+1)^2}{2p+1}\right]^2}. \tag{6}$$

当取 $p=1.5$，则 $\varepsilon^2=0.0117$. 用公式(24.22)計算 λ_1 时，必須知道 λ_0，λ_2 的值，由于 λ_1 的最小固有值可使 $\lambda_0=-\infty$，从(24.22)右边不等式，得 $\lambda_1\leqq I[u]$，与(4)一致。

求下界时，需要知道 λ_2 的值，虽然不知道它的正确值，但是由于問題知 $\lambda_2\geqq 4$，所以由(24.22)左边不等式，得

$$\lambda_1\geqq 1.6804-\frac{0.0117}{4-1.6804}=1.6754. \tag{7}$$

这样，对 λ_1 得出較精确的估計，即 $1.6754\leqq\lambda_1\leqq 1.6804$.

为了得出 $\lambda_2\geqq 4$，用原来的固有值問題与下面輔助固有值問題比較就可以了。

$$\varphi''+\mu\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\varphi=0,\quad \varphi(0)=0,\ \varphi(\infty)=\text{有限}. \tag{8}$$

这个固有值問題，可以正确地解出，最初的两个固有函数是

$$\mu_1=1,\ \varphi_1=1-e^{-x};\quad \mu_2=4,\ \varphi_2=(1-e^{-x})(1-3e^{-x}).$$

又因

$$\frac{e^{-x}}{x}<\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\quad(0<x<\infty),$$

所以(8)的固有值，較問題(1)的固有值小(参考变分法§6最末)，由此可知 $\lambda_1\geqq\mu_1=1$，$\lambda_2\geqq\mu_2\geqq 4$.

§25 化为常微分方程的解法

1) 方法説明　在 Ritz 方法中，取参数为函数时，就可将問題化为常微分方程。例如矩形 $[-a, a; -b, b]$ 上的 Poisson 方程。

在矩形内，$\Delta u=-1$，在周界上，$u=0$. 对应的变分問題为

$$J[u]=\iint[u_x^2+u_y^2-2u]\,dx\,dy=\min.$$

取試驗函数为下面形式：

$$\tilde{u}=(b^2-y^2)f(x),$$

它满足边界条件 $y=\pm b$, 将 $\tilde{u}$ 代人 $J[u]$ 中,则

$$J[\tilde{u}]=\int_{-a}^{a}dx\int_{-b}^{b}[(b^2-y^2)^2f'^2+4y^2f^2-2f(b^2-y^2)]\,dy$$

$$=\int_{-a}^{a}\left[\frac{16}{15}b^5f'^2+\frac{8}{3}b^3f^2-\frac{8}{3}b^3f\right]dx.$$

使其为最小的变分問題,归結于解微分方程

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{32}{15}b^5f'\right]-\frac{16}{3}b^3f+\frac{8}{3}b^3=0,\ 即\ f''-\frac{5}{2b^2}f=-\frac{5}{4b^2}.$$

其解为

$$f(x)=a_1\cosh\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}+a_2\sinh\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}+\frac{1}{2}.$$

为了使 $\tilde{u}$ 当 $x=\pm a$ 时,也滿足边界条件,置 $f(\pm a)=0$ 来确定积分常数,由

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{g(x)}{g(a)}\right],\ 所以\ \tilde{u}(x,y)=\frac{1}{2}(b^2-y^2)\left[1-\frac{g(x)}{g(a)}\right],$$

其中

$$g(x)=\cosh\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}.$$

用此方法所得的近似函数 $\tilde{u}$, 当比 $\frac{a}{b}$ 愈大时, 就越接近于真的函数 $\bar{u}$.

2) 决定系数函数与 Galerkin 方法之間的关系 考虑 Poisson 方程

在 G 内, $\Delta u=p(x,y)$,

在 Γ 上, $u=0$.

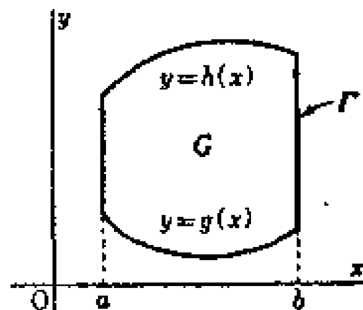


图 25.1

区域 G 是由直綫 $x=a$, $x=b$ 与曲綫 $y=h(x)$, $y=g(x)$ 所圍成的 (图 25.1)。取試驗函数 u_n 为下面形式:

$$u_n(x, y)=\chi_0(x, y)+\sum_{k=1}^{n}\chi_k(x, y)\cdot f_k(x), \qquad (25.1)$$

其中 $\chi_0(x, y)$在 Γ 上等于0. $\chi_k(x, y)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ 是预先适当选择的，除了在 $x=a$, $x=b$ 上外，在周上等于 0 的函数列。将其代入对应的泛函中，得

$$J[u_n]=\iint_G\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2+2pu_n\right]dx\,dy$$

$$=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{h(x)}\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\chi_k}{\partial x}f_k+\sum_{k=1}^{n}\chi_k f_k'+\frac{\partial\chi_0}{\partial x}\right]^2\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\chi_k}{\partial y}f_k+\frac{\partial\chi_0}{\partial y}\right]^2+2p\left[\sum_{k=1}^{n}\chi_k f_k+\chi_0\right]\right\}dy.$$

求使其最小的 $f_k(x)$，则可由下面常微分方程組确定：

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)}\frac{\partial u_n}{\partial x}\chi_k dy-\int_{g(x)}^{h(x)}\left[\frac{\partial u_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial\chi_k}{\partial x}+\frac{\partial u_n}{\partial y}\cdot\frac{\partial\chi_k}{\partial y}+p\chi_k\right]dy$$

$$=0\quad(k=1, 2, \cdots, n). \qquad (25.2)$$

如果将 $\chi_k(x, y)$的边界条件也考虑进去，则

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)}\frac{\partial u_n}{\partial x}\chi_k dy=\int_{g(x)}^{h(x)}\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial u_n}{\partial x}\chi_k\right]dy$$

$$=\int_{g(x)}^{h(x)}\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\chi_k+\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial\chi_k}{\partial x}\right]dy,$$

$$\int_{g(x)}^{h(x)}\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial\chi_k}{\partial y}=-\int_{g(x)}^{h(x)}\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\chi_k\,dy,$$

所以(25.2)成为下面的形式：

$$\int_{g(x)}^{h(x)}\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}-p\right]\chi_k dy=0\quad(k=1, 2, \cdots, n). \qquad (25.3)$$

这就是决定 $f_k(x)$ 的方程的 Galerkin 方法。

将此方程組在边界条件

$$f_k(a)=f_k(b)=0\quad(k=1, 2, \cdots, n) \qquad (25.4)$$

下解出，可得出(25.1)形式的最好的近似解。

基底 $\chi_k(x, y)$的区域如图 25.1 时，则应为下列函数之一：

$$\chi_k(x, y) = [y-g(x)][h(x)-y]y^{k-1}, \tag{25.5}$$

$$\chi_k(x, y) = \sin\frac{k\pi[y-g(x)]}{h(x)-g(x)} \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{25.6}$$

这样基底满足极小化序列的条件。

区域的形状愈复杂，对基底的选择就越困难。如果区域是下面形状时，比較容易选定。

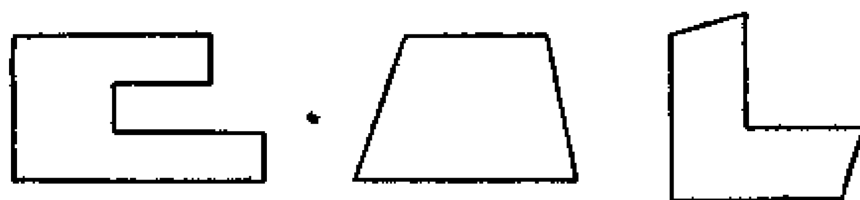


图 25.2

这个方法，同样适用于第二种、第三种边界条件。此时 $\chi_k(x,y)$ 不要边界条件。但是 $\chi_k(x, y)$ 不滿足适当的边界条件时，不能使用(25.3)(参照§22)。

3) **函数列的收斂性** 区域的形状，如图 25.1 时，对边界值問題(21.1)，(21.2)，依本节所述的方法可用(25.5)或(25.6)为基底。在(23.8)的条件下，知

$$|\bar{u}-u_n| = O\left(\frac{\sqrt{\log n}}{n}\right). \tag{25.7}$$

利用这个結果，根据 Ritz 方法，用試驗函数为

$$u_n(x, y) = (x-a)(b-x)[h(x)-y][g(x)-y]\cdot\sum_{i,k\leq n} a_{ik}x^iy^k \tag{25.8}$$

时，可导出下式：

$$|\bar{u}-u_n| = O\left(\frac{\log n}{n}\right). \tag{25.9}$$

第5章　边界值問題的差分法近似解法

本章和下一章是介紹差分法的近似解法概要。本章中所举的具体例子，虽然是以椭圓型微分方程的边界值問題为主，可是在§27，§28，§33，§37所提的基本概念，§38，§39所述的一般定理，对于下一章处理的初始值問題，照旧适用。

用差分法的近似解法是由"用差商代替微商"这样朴素的想法出发的，至于数学理論基础的奠定却是非常困难的。另一方面，在实际应用上，为了得到精确的結果，必須有各种补助的方法。本书一方面用数学分析的方法討論了差分法的理論問題，另一方面亦詳細地介紹在实用中重要的补助方法。但要求两者兼顾得很好很难达到。由于这方面的有关教科书还很少，本书只期望能起到一般介紹的作用。

§26　方法示例

設 h 为充分小的正数，$f(x)$ 为可微函数，由微商定义，知

$$h^{-1}[f(x+h)-f(x)]\doteqdot f'(x), \tag{26.1}$$

卽左边是以 h 为差分間隔的**前进差商**，当 h 充分小时，是微商的近似值。对于**后退差商** $h^{-1}[f(x)-f(x-h)]$ 有同样的意义。再者，若 $f(x)\in C^3$❶，应用 Taylor 公式，可知

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x-h)&\\&=2hf'(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x+\theta_1 h)+\frac{h^3}{6}f'''(x-\theta_2 h)\\&=2hf'(x)+\frac{h^3}{3}f'''(x+\theta h);\end{aligned}$$

其中

$$0\leqq\theta_1,\ \theta_2\leqq1,\quad |\theta|\leqq1.$$

---

❶ $f(x)\in C^n(n=0,1,2,\cdots)$是指在定义域内直到 n 阶导数有界連續。

由此，得

$$(2h)^{-1}[f(x+h)-f(x-h)]=f'(x)+R_1,\quad R_1=O(h^2). \quad (26.2)$$

如果用 M_n 表示 $|f^{(n)}(x)|$ 在定义域内的最大值，那么，对于 R_1 有如下的估計：

$$R_1=\frac{h^2}{6}\vartheta M_3,\quad |\vartheta|\leq 1. \quad (26.3)$$

若 (26.2) 的左边作为 $f'(x)$ 的近似值，那么，其精确度对于非常光滑的函数来說，比 (26.1) 的近似值为好。但不論那一个，对于靠近 x 的点，都可用 $f(x-h)$，$f(x)$，$f(x+h)$ 的綫性式作出 $f'(x)$ 的近似式。对于在 x 点的高阶微商亦可用靠近 x 点的函数值的綫性式作出近似式。例如对于 $f''(x)$，可用 2 阶差商（前进，中央，后退）作出它的近似式。特別当 $f\in C^4$ 时，用 (26.2) 的方法，可得

$$h^{-2}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)]=f''(x)+R_2,\quad R_2=O(h^2), \quad (26.4)$$

其中 R_2 的估計值为

$$R_2=\frac{h^2}{12}\vartheta M_4,\quad |\vartheta|\leq 1. \quad (26.5)$$

差分法的近似解法，或簡称为**差分法**，就是根据上述的事实，将微分方程变为差分方程，用后者的解作为前者近似解的近似解法。以后将会看到，这种方法一般在偏微分方程的各种問題中，应用很广泛，而且較其他方法便利。首先仅就常微分方程的簡单边界值問題来加以說明。

在区間 $G=\{x;\ a\leq x\leq b\}$ 上，求下面边界值問題的解 $u(x)$：

$$u''(x)-q(x)u(x)=f(x)\quad (a<x<b), \quad (26.6)$$

$$u(a)+\sigma_1 u'(a)=\varphi_1,\quad u(b)+\sigma_2 u'(b)=\varphi_2, \quad (26.7)$$

其中 q，f 与 σ_1，σ_2，φ_1，φ_2 都是已知函数与常数。应用差分法解此問題时，先将 G 分割成长度为 $h\left(h=\frac{b-a}{N}\right)$ 的 N 个子区間，設

G_h 表示 $N+1$ 个分点 $x_n=a+nh(0\leqq n\leqq N)$ 的集合。然后在 G_h 上定义函数 u_h，使其满足下面的 (26.8)，(26.9)❶：

$$h^{-2}[u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}]-q_nu_n=f_n \quad (1\leqq n\leqq N-1), \qquad (26.8)$$

$$u_0+\sigma_1h^{-1}[u_1-u_0]=\varphi_1,\ \ u_N+\sigma_2h^{-1}[u_N-u_{N-1}]=\varphi_2, \qquad (26.9)$$

其中

$$u_n=u_h(x_n),\quad q_n=q(x_n),\quad f_n=f(x_n).$$

从(26.4)，可知(26.8)是微分方程(26.6)的近似差分方程，另外从 (26.1)，可知(26.9)是边界条件(26.7)的近似边界条件。其次，当 h 充分小时，方程(26.8)，(26.9)的解 $u_h(x_n)\doteq u(x_n)$ 是 $u(x)$ 的近似解。另一方面，(26.8)，(26.9)是 $N+1$ 个未知数 $u_n=u_h(x_n)$ 的 $N+1$ 个方程組，从而可用代数方法求解。这样，差分法的近似解法就是将微分方程的問題，近似的归結为有限个未知数的方程組的方法。如上面所导出的差分方程，一般可以不用数值解法而正确地求出解来，下面介紹几个能够正确求出微分方程及差分方程解的例子，作为参考。

例1 (i) $u''=6x,\ \ u(0)=0,\ \ u(1)=1.$

正确解是 $u=x^3$. 設 $h=1/N$, $u_h(nh)=u_n$, 則对近似解 u_h 的方程为

$$\left.\begin{aligned}&h^{-2}[u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}]=6nh \quad (1\leqq n\leqq N-1),\\ &u_0=0,\quad u_N=1.\end{aligned}\right\} \qquad (26.10)$$

此差分方程用加减法可解。即設 $v_n=u_{n+1}-u_n$，由 (26.10) 得 $v_n-v_{n-1}=6h^3n$. 对此式的两边，分别令 n 由1到 n 并作和，得

$$v_n-v_0=3h^3n(n+1),$$

从而有

$$u_{n+1}-u_n=3h^3n(n+1)+v_0.$$

再将两边的 n 由0到 $n-1$ 相加，并注意到 $u_0=0$, 則有

$$u_n=h^3(n-1)n(n+1)+v_0n.$$

在此設 $n=N$, 則

$$1=u_N=1-h^2+v_0N \quad (因\ Nh=1).$$

---

❶ 在这样格子上定义的函数参看§3.

故 $v_0=h^3$，結果是

$$u_n=(nh)^3, \text{ 即 } u_h=x^3,$$

这与微分方程的解是一致的。即使换为其他边界条件，差分法所求得的解也沒有誤差，因为此时正确解是3次函数，对于3次函数来說，由(26.4)中 $R_2=0$ 可以想到不会产生誤差。

(ii) $u''=12x^2,\quad u(0)=0,\quad u(1)=1.$

正确解是 $u=x^4$. 近似解 u_h 的方程，若設 $u_h(nh)=u_n$，則为

$$u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}=12h^4n^2 \quad (1\leq n\leq N-1),$$

$$u_0=0,\quad u_N=1.$$

和解上面(i)同样，得

$$u_n=(nh)^4+h^3n(1-nh),$$

即

$$u_h=x^4+h^2x(1-x).$$

誤差为 $h^2x(1-x)$. $u-u_h=O(h^2)$ 是由(26.4)的誤差 $O(h^2)$ 所影响的。

例 2 差分法也适用于固有值問題。此处的例子以后經常引用。

求

$$u''(x)=\lambda u(x),\quad u(0)=u(1)=0,\quad u\neq 0 \tag{26.11}$$

的正确固有值，固有函数是

$$u=u^{(k)}=C\cdot\sin k\pi x,\quad \rho=\rho_k=-k^2\pi^2\quad (k=1,2,\cdots).$$

将固有值問題(26.11)，变为下面差分方程的固有值問題(这里 $h=1/N$, $u_n=u_h(nh)$)：

$$\left.\begin{aligned}&h^{-2}[u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}]=\rho u_n\quad (1\leq n\leq N-1),\\&u_0=u_N=0,\quad u_n\neq 0.\end{aligned}\right\} \tag{26.12}$$

(26.12)中消去 u_0, u_N，上面的差分方程固有值問題，不外是作用于 $N-1$ 維向量 $\{u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}\}$ 的对称矩陣

$$A_h=h^{-2}\begin{pmatrix}-2 & 1 & & 0\\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & & 1 & -2\end{pmatrix}$$

的固有值問題，故存在 $N-1$ 个固有值 ρ_k. 将 ρ_k 按大小顺序排列后，可看作对应于 $\lambda_k\ (1\leq k\leq N-1)$ 的近似值。这样，綫性微分方程的固有值問題，应用差分法就成为解有限个元的矩陣的固有值問題了。(26.12)可以如下来解。对于任意的 ρ，設二次方程

$$t^2-(2+\rho h^2)t+1=0 \tag{26.13}$$

的两根为 α, β, 則 $u_n=c_1\alpha^n+c_2\beta^n$ 滿足(26.12)的第一式。由 $u_0=0$ 知 $c_1+c_2=0$, 再由 $u_N=0$ 得 $\alpha^N-\beta^N=0$. 故

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\sqrt[N]{1}=e^{i2k\pi/N}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1). \tag{26.14}$$

这里不能取 $k=0$, 因为这时 $\alpha=\beta$, 从而 $u_n\equiv 0$. 由 (26.14) 和 $\alpha\beta=1$ 得

$$\alpha=\frac{1}{\beta}=e^{ik\pi/N}=e^{ik\pi h}. \tag{26.15}$$

最后可知 $u_h=u_h^{(k)}(nh)=C\cdot\sin k\pi nh\ (h=1/N,\ 1\leqq k\leqq N-1)$是(26.12)的解。对应于 $u_h^{(k)}$ 的固有值,由于(26.13)中 $\alpha+\beta=2+\rho h^2$, 故

$$\rho=\rho_k=\frac{2}{h^2}(\cos k\pi h-1)=-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2}\,(1\leqq k\leqq N-1). \tag{26.16}$$

誤差是

$$\rho_k-\lambda_k=\frac{h^2}{12}\pi^4k^4+O(h^4)=O(h^2).$$

注　使用差分运算的記号,可用下列記法:

$$\left.\begin{aligned}&D_hu(x)=u(x+h)-u(x),\quad D_h'u(x)=u(x)-u(x-h),\\&\delta_h^{(2)}u(x)=u(x+h)-2u(x)+u(x-h).\end{aligned}\right\} \tag{26.17}$$

当 $u_n=u(nh)$ 时,

$$D_hu_n=u_{n+1}-u_n,\quad D_h'u_n=u_n-u_{n-1},$$
$$\delta_h^{(2)}u_n=u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}.$$

另外, D_h, D_h' 等的积,也与普通一样来規定。例如对于 $\delta_h^{(2)}u=D_hD_h'u=D_h'D_hu$. 省略了添字 h, 可記为 $\delta^{(2)}$, D, D'.

§27 格子 (net, Gitter)

为了簡单起見,仅就二元情况来說明,至于多元与一元情况,可由此类推。考虑由直綫族

$$x=x_m=a+mh,\quad y=y_n=b+nk\quad (m,\ n\ 为整数) \tag{27.1}$$

所作的图形,其中 $h>0$, $k>0$, a, b 为常数。这种图形叫**长方形格子**。点$(a,\ b)$叫格子的**原点**, h, k 分别叫 x 方向, y 方向的**格子間隔**。特别当 $h=k$ 时,叫做**正方形格子**。点 $P_{m,n}(x_m,\ y_n)$ 叫格子(27.1) 的**格子点**。对于任意格子点 $P_{m,n}$, 4 点 $P_{m+1,n}$, $P_{m,n+1}$,

$P_{m-1,n}$, $P_{m,n-1}$ 称为 $P_{m,n}$ 的**近傍(格子)点**。若格子点的任意集合为 G_h，而 $P_{m,n}$ 与其四个近傍点都属于 G_h，则称 $P_{m,n}$ 为 G_h 的**内点**，属于 G_h 而不为内点的格子点，称为**边界点**。G_h 内点的集合，边界点集合分别称为 G_h 的**内部**与**边界**。再有对于属于 G_h 的两个任意格子点 P, Q, 如能选定 $P=R_0, R_1, R_2, \cdots, R_{n-1}$, $R_n=Q$, $R_i\in G_h$, 使 R_{i-1} 是 R_i 的近傍点 $(i=1, \cdots, n)$，称 G_h 为**格子区域**。

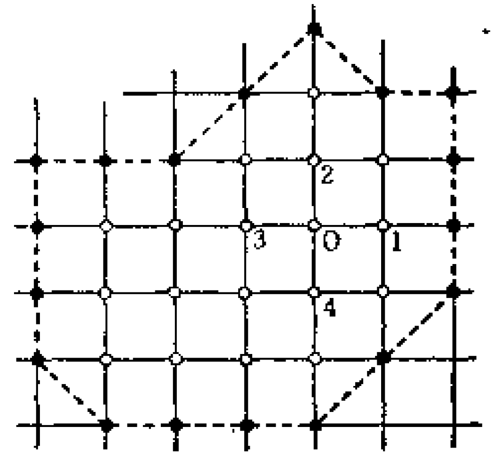


图 27.1 （●边界点，○内点）

普通使用的格子，一般是长方形格子，所以后面的討論中都限于长方形格子。当然根据問題的不同，有时也使用特殊格子。

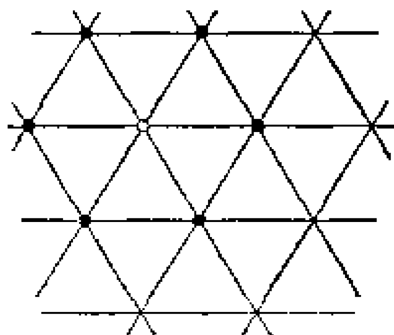
例 1 正三角形格子。l, m, n 为整数的直綫族

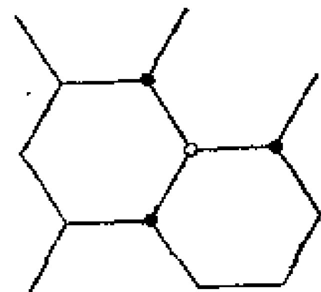
$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}hl, \quad y=\sqrt{3}\,x+\sqrt{3}\,hm,$$

$$y=-\sqrt{3}\,x+\sqrt{3}\,hn \ (h>0 \text{ 为常数}),$$

将平面分成边长等于 h 的正三角形，以这些直綫交点为格子点的格子，叫做以 h 为格子間隔的正三角形格子。这时任意格子点的近傍是由到此点距离为 h 的六个格子点組成的。

例 2 由边长为 h 的正六边形所布滿的平面，也确定一种格子，称为以 h 为格子間隔的正六边形格子。格子点是正六边形的頂点，任意格子点的近傍是由到此点距离为 h 的三个格子点組成的。


图 27.2 （●是○的近傍点）


图 27.3 （●是○的近傍点）

例 3 在 x 軸上，以 $x_n=\log n$ 为坐标的点的集合，可以看作是半直綫 $x>0$ 上所确定的一元格子点。此时格子間隔是不等的。在多元的情况，为了用差分法詳細研究問題中的函数在某些点近傍的状态，有时也在此点附近采用間隔不等的格子。但本书中不使用間隔不等的格子。

注 1 今后除特別說明外，所謂格子都是指长方形格子而言。另外在差分法的近似解法討論中，有时要考虑格子間隔趋于零的情况，从而有必要研究各种各样的格子，即格子的族，并可假定 h 是决定族中每个格子的参数，也就是說 k, a, b 成为 h 的函数。因此，对一切格子点的集合，可以不用 $G_{h,k}$，而直接用 G_h 表示。

注 2 以后凡是連系有关格子問題，不作特別說明时，m, n 都表示整数，N 表示自然数。

§28 近似差分方程的定义

1) 設 G 为一区域，Γ 为其边界，在 G 和 Γ 的和集合 $G\cup\Gamma$ 上定义了函数 u，現在考虑一下 u 所滿足的微分方程(不含边界条件)

$$L[u]=f. \tag{I}$$

本节的目的就是对此方程定义其近似差分方程。

(I) 中的 L 是 u 对应于 $L[u]$ 的微分算子，若要使 $L[u]$ 有意义，必須使 u 具有一定的性质。例如 $L=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ 时，u 必須二阶可微。这样，根据 L 的結构和处理問題的方便，仅限于在某些函数的集合 U 的元素上考虑 $L[u]$，当 $u\in U$ 时 $L[u]\in F$ (以函数为元素)，即定义 F 为 $L[u]$ 的集合"$L;u\to L[u], u\in U, L[u]\in F$"，換句話說，就是将 L 看作是从 U 到 F 的映象 (L: $U\to F$)。U, F 的元素一般用 u, f 表示，$f\in F$ 通常定义在 G 上，可是当 $u\in U$ 非常光滑时，根据对在 Γ 上微分的不同解釋，也可定义在 $G\cup\Gamma$ 上。

2) 相应于上面的 $G\cup\Gamma$，可如下来定义格子区域。对于充分小的正数 h，导入格子間隔为 h 的格子，并用 G_h 表示包含在 $G\cup\Gamma$ 中的格子点全体集合。但假定当 $h\to 0$ 时，其他格子間隔也同时趋

近于 0，从而在 G 的任意点的近傍，当所取的 h 充分小时，至少必有一个 G_h 之点。现在对于每个 h，考虑一下在 G_h 上定义的格子点函数 u_h 的差分方程

$$l_h[u_h]=f_h.$$

正如在 1) 中对 L 所作的那样，将差分算子 l_h，看作是把在 G_h 上定义的函数 u_h 的集合 U_h，映于在 G_h^0 上定义的 f_h 的集合 F_h 的映象。一般 $G_h^0\subset G_h$，也可以 $G_h^0=G_h$。但是在后面所举的具体例子中，通常是 G_h^0 为 G_h 的内部（参照下面例子）。

例 1 若将 §26 中的差分方程 (26.8) 的左边，看作差分算子 l_h 的定义，根据上面所述，G_h 为 $\{x_n;\ 0\leqq n\leqq N\}$，$G_h^0$ 为 $\{x_n;\ 1\leqq n\leqq N-1\}$❶.

例 2 設 $G\cup\Gamma$ 是长方形 $0\leqq x\leqq a$，$0\leqq y\leqq b$，并用 $x=mh$，$y=nh$（$h>0$，常数）确定格子。将 $(mh,\ nh)$ 写为 $P_{m,n}$，则 $G_h=\{P_{m,n};\ 0\leqq m\leqq[a/h],0\leqq n\leqq[b/h]$，[ ]是表示整数部分的 Gauss 的符号$\}$。

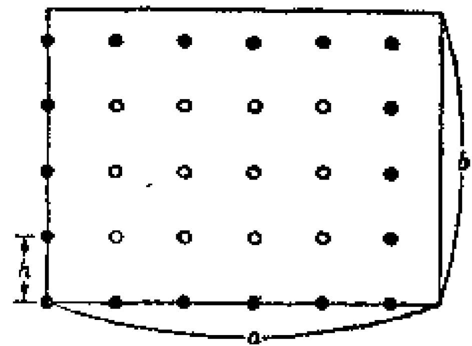


图 28.1 $\circ\in G_h^0$，$\bullet\in\Gamma_h$

$$l_h[u_h]=h^{-2}[u_{m+1,n}+u_{m,n+1}+u_{m-1,n}+u_{m,n-1}-4u_{m,n}].$$

但取 $u_{m,n}=u_h(P_{m,n})$ 时，

$$G_h^0=\{P_{m,n};\ 1\leqq m\leqq[a/h]-1,\ 1\leqq n\leqq[b/h]-1\}.$$

注 1 例 2 中 $l_h[u_h]$ 的表示式，是只写出 $l_h[u_h]$ 在点 $P_{m,n}$ 的表示式，同时将 m，n 作为流动坐标来理解。

3) 这一段的目的是討論 1) 中的 l_h 对 L 的迫近程度。当考虑不同类型算子間的迫近程度时，对于定义在同一函数集合上的算子，即算子的定义域相同的話，那末，只需考虑对于同一元素作用結果的接近程度就够了。现在若 U 与 U_h 是不同的集合，用 $l_h[u_h]$ 与 $L[u]$ $(u\in U)$ 比較时，其中的 u_h 应如何确定呢？这个問題可如下来处理。由于 $u\in U$ 定义在 $G\cup\Gamma$ 上，所以也定义在 G_h 上。因而将 u

---

❶ 对于滿足某一条件 $R(x)$ 的 x 的集合，記作 $\{x;R(x)\}$，这是后面常用的記号。

限定在G_h上时，可得到定义在G_h上的函数$u|_{G_h}$. 于是，对于任意的$u\in U$，如果U_h为定义在G_h上的一切函数所成的集合，那么，必有$u|_{G_h}\in U_h$. 故此，与$L[u]$比較的对象可取$l_h[u|_{G_h}]$. 这里前者是連續变数的函数$\in F$，后者是在G_h^0上定义的格子点函数。因此还要求：对任意的$f\in F$限制在G_h^0上时，所得的格子点函数$f|_{G_h^0}$必須属于F_h. 当这些要求满足时，对于任意的$u\in U$，就可以很自然地将$L[u]|_{G_h^0}$和$l_h[u|_{G_h}]$作为F_h的元素来作比較。

下一步驟必須对F_h的两个元素的接近程度給以意义。因而有必要在F_h中引入拓扑。为了以后方便，不但对F_h，而且对所有的U, F, U_h, F_h，一齐引入距离。若是以这些函数为元素的集合成为綫性空間时，适当地引入范数即可。此时，对于U, F, U_h, F_h上的范数分别用$\|u\|_U$, $\|f\|_F$, $\|u_h\|_{U_h}$, $\|f_h\|_{F_h}$表示。至于范数的具体形式，根据具体問題来选取比較方便。在后面的討論中，最常使用的是

$$\left.\begin{aligned}&\|u\|_U=\max|u|,\quad \|f\|_F=\max|f|,\\&\|u_h\|_{U_h}=\max|u_h|,\quad \|f_h\|_{F_h}=\max|f_h|.\end{aligned}\right\}\tag{28.1}$$

但max是在每个函数的定义范圍来取的，故此需要有若干补助条件作为約束。

(i)　为了方便，即使是sup（上限），也記作max.

(ii)　在不至于引起混乱时，把$u|_{G_h}$, $f|_{G_h^0}$也記作u, f. 例如可将$l_h[u|_{G_h}]$, $\|u|_{G_h}\|_{U_h}$略記为$l_h[u]$, $\|u\|_{U_h}$. 再有等式$l_h[u_h]=f$是指$l_h[u_h]=f|_{G_h^0}$.

(iii) 当U不是綫性空間时，距离不能引出范数。可是例如将$u, v\in U$的距离dis(u, v)用dis$(u, v)=\max|u-v|$定义时，可将dis(u, v)写成$\|u-v\|_U$，另外$\|u\|_U$的定义是$\|u\|_U=\max|u|$. 具体处理問題时，差不多U, F等都是綫性空間，因而，通常用$\|\ \|_U$, $\|\ \|_F$等进行討論时，可将其看作为距离，亦可看作为范数。由于这个理由，上面为了方便所引入的写法，不至于带来很大的混乱。

其次，一般来說，格子愈細，则 $u\in U$ 和 $u|_{G_h}$ 愈接近，对于 f 和 $f|_{G_h^*}$ 也一样。这些事情用范数的言語来反映，那么，就有下面的条件。

对任意的 $u\in U$, $f\in F$, $h\to 0$,

$$\|u\|_{U_h}\to\|u\|,\quad \|f\|_{F_h}\to\|f\|_F. \tag{28.2}$$

(28.2)是对范数选擇的限制，可是若把 $\|\ \ \|_U$ 和 $\|\ \ \|_{U_h}$, $\|\ \ \|_F$ 和 $\|\ \ \|_{F_h}$ 用相似的方法定义，并当 u, f 适当光滑时，就可以成立。

例 3 如果 u, f 連續，对于(28.1)的范数，(28.2)成立。

例 4 $G=\{x;\ 0<x<1\}$, $G_h=\{x_n;\ x_n=nh,\ 0\leqq n\leqq N,\ h=1/N\}$ 时，如果 u 在 $0\leqq x\leqq 1$ 上連續，则

$$\|u\|_U=\int_0^1|u|\,dx,\quad \|u\|_{U_h}=h\sum_{n=0}^{N}|u(x_n)|.$$

(28.2) 的第一式成立。

注 2 就 U 来說，有时不明显地指出 u 本身的条件，而只提到范数的关系。这时可把 U 理解为不但具有所給的范数，并且是由相当光滑的函数組成的空間。

对于以后所考慮的 $U,\cdots,F_h$, $\|\ \ \|_U,\cdots,\|\ \ \|_{F_h}$, 都认为已經滿足上述所有的要求。

4) 根据上述的准备，有下列定义。

定义 1 对于任意的 $u\in U$, 当 $h\to 0$ 时，如果

$$\|L[u]-l_h[u]\|_{F_h}\to 0, \tag{28.3}$$

则称 l_h 为在 U 上 L 的**近似差分算子**。

另外，对于充分小的 h, 即关于某正数 h_0, 当 $0<h<h_0$ 时，若对于任意的 $u\in U$, 下式

$$\|L[u]-l_h[u]\|_{F_h}\leqq h^{\varkappa}M\ (\varkappa>0) \tag{28.4}$$

成立，则认为 l_h 在 U 上对 L 的**近似度**为 $\varkappa$. 但 M 是依賴 u 而不依賴于 h 的常数。

注 3　如(28.3)，(28.4)仅对 U 中某些 u 成立，则对这些 u 来說，称 l_h 为 L 的(近似度 $\varkappa$ 的)近似算子。

注 4　詳細說来，在提到近似性，近似度时，必須提出范数。当 $u\in U$ 非常光滑，U 不特别狭窄的情况下，对一般的范数，近似性，近似度是不变的❶。因而，不需特别說明。

例 5　$L[u]=u''(x)$，l_h 是用§26 例1的左边定义的。此时如将

U 取为 C^2，　l_h 是 L 的近似算子.

U 取为 C^3，　l_h 以近似度1近似于 L.

U 取为 C^4，　l_h 以近似度2近似于 L.

但范数可用(28.1)来定义。

定义 2　設在 U 上 l_h 是 L 的(近似度 $\varkappa$ 的)近似差分算子，則称

$$l_h[u_h]=f_h,\ 但\ f_h=f\,|_{G_h^0} \tag{III}$$

为微分方程(I)在 U 上的(近似度 $\varkappa$ 的)近似差分方程。

注 5　把上面式子記作(III)而不記作(II)的原因，主要是为了以后的方便。有时略記(III)为 $l_h[u_h]=f$.

問題　設 G_h 和例4的一样，就下列各項，考虑(28.2)第一式成立的条件是什么。但 $u_n=u_h(x_n)$.

(i)　$$\|u\|_U^2=\int_0^1 u^2(x)dx,\quad \|u_h\|_{U_h}^2=h\sum_{n=1}^{N}u_n^2.$$

(ii)　$$\|u\|_U=\max_x|u(x)|+\max_x|u'(x)|,$$

$$\|u_h\|_{U_h}=\max_n|u_n|+\max_n\left|\frac{u_{n+1}-u_n}{h}\right|.$$

§29　近似差分算子的构成(常微分)

1)　設 L 是以 x 为自变量的常微分算子，G 是一元的有限区間。現在讲一下 L 的近似差分算子 l_h 的构成方法。格子用 $x=x_n=nh$ (h 是正常数，n 是整数)来确定，U 是非常光滑的任意函数

❶　当范数依賴于 h 时，近似性，近似度是可能变更的。——校者注

集合，令 $F=\{L[u];\ u\in U\}$，$U_h=\{u|_{G_h},\ u\in U\}$，$F_h=\{l_h[u_h],\ u_h\in U_h\}$，并大体上可根据 (28.1) 取范数，得到的結果，对于一般的范数是通用的。

如果对于 L 中的各阶微分 d^p/dx^p，按照 §26 中所述的那样处理，立刻可以从一般的 L 作出 l_h。例如 $L[u]=F(x,\ u',\ u'')$，$F(x,\ \xi,\ \eta)$ 关于 $\xi,\ \eta$ 連續可微分，由 §26 的結果，可知

$$l_h[u_h]=F(x_h,\ h^{-1}D_hu_h,\ h^{-2}\delta_h^{(2)}u_h)$$

是 L 的近似差分算子。因而以下只要讲 d^p/dx^p 的近似差分算子的作法。

2) 此处所考察的是，对于任意格子点 $P_n(x_n)$ 上的 $u^{(p)}(x_n)\equiv u_n^{(p)}$，如何用有限个适当的格子点 $P_{n+\nu}(\nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 上 u 的值 $u_{n+\nu}$ 的綫型組合来近似的問題。也就是用不依賴于 n 的常数 c_ν，使

$$h^{-p}\sum_\nu c_\nu u_{n+\nu}\doteqdot u_n^{(p)}.$$

不失去一般性，可取 $n=0$，将这个問題正确的叙述如下。对于有限个点 $P_\nu(\nu h)$，$p,\ \varkappa$ 为指定的自然数时，設 u 是充分光滑的任意函数，求使

$$A_h[u]_0\equiv h^{-p}\sum_\nu c_\nu u_\nu=u_0^{(p)}+R,\quad R=O(h^\varkappa)\tag{29.1}$$

成立的系数 c_ν。这个問題的解，当 P_ν 的个数为 l，而 $l\geq p+\varkappa$ 时是存在的，特别当等号成立时也同样是存在的。实际上，将(29.1)的 $u_\nu=u(\nu h)$，依据 Taylor 公式按 νh 展开，比較两边 h 各次冪的系数，对于 c_ν，得条件

$$\left.\begin{aligned}&\sum_\nu c_\nu\nu^\rho=0\quad(0\leqq\rho\leqq p+\varkappa-1,\ \rho\neq p),\\&\sum_\nu c_\nu\nu^p=p!.\end{aligned}\right\}\tag{29.2}$$

如果 $l=p+\varkappa$，就把 (29.2) 看作是关于 c_ν 的方程組，这时，系数的行列式是 Vandermonde 行列式，因而不等于零。在应用上希望构

造尽可能簡单的差分方程，所以当 p, $\varkappa$ 被指定时，尽可能使 l 小，另外尽可能使 P_ν 和 P_0 接近。解 (29.2) 求出了 c_ν 后，再估計 R 时，可在 u_ν 的展开式中，用具有因子 $(h\nu)^{p+\varkappa}$ 的項，作为剩余項即可。令 $M_{p+\varkappa}=\max|u^{(p+\varkappa)}(x)|$ 则得

$$|R|\leqq\frac{h^{\varkappa}}{(p+\varkappa)!}\left(\sum_{\nu}|c_\nu\nu^{p+\varkappa}|\right)\cdot M_{p+\varkappa}. \tag{29.3}$$

注1 在决定 c_ν 的問題中，如果 P_ν 的排法，恰好可以适用某一种数值微分公式时，则依照公式，立刻可以得到解。而且这时由数值微分的誤差公式，可得出比(29.3)更好的估計式。但从目的是为了作近似差分方程来說，本质上并沒有优劣之分。

例1 $\{\nu\}=\{0, 1, 2\}$, $p=1$, $\varkappa=2$, 对于 c_0, c_1, c_2 的方程，由(29.2)为

$$c_0+c_1+c_2=0,\quad c_1+2c_2=1,\quad c_1+4c_2=0.$$

解之，得 $c_0=-3/2$, $c_1=2$, $c_2=-1/2$. 因而

$$\frac{-3u_0+4u_1-u_2}{2h}=u_0'+R,\quad R=O(h^2). \tag{29.4}$$

由 (29.3)，知 $|R|\leqq h^2M_3$. 但由数值微分式，得到下面的估計式：

$$R=-\frac{h^2}{3}\theta M_3,\quad |\theta|\leqq1. \tag{29.5}$$

由 (29.4), (29.5) 类似地可以得到

$$\frac{u_{-2}-4u_{-1}+3u_0}{2h}=u_0'+R,\quad R=\frac{h^2}{3}\theta M_3,\quad |\theta|\leqq1. \tag{29.6}$$

这个公式以后常常要引用。

例2 $\{\nu\}=\{-1, 0, 1\}$, $p=2$, $\varkappa=1$. 由 (29.2)知

$$c_{-1}+c_0+c_1=0,\quad -c_1+c_1=0,\quad c_1+c_2=2.$$

解之，得 $c_1=c_{-1}=1$, $c_0=-2$. 考虑 (29.3)，若 $u\in C^3$, 得出已知关系式

$$h^{-2}[u_1-2u_0+u_{-1}]=u_0''+3^{-1}h\theta M_3,\quad |\theta|\leqq1.$$

在 (29.3) 的估計中，假定了 $u\in C^{p+\varkappa}$, 現在如果假定 $u\in C^4$, 象 §1 中看到的那样，可得

$$h^{-2}[u_1-2u_0+u_{-1}]=u_0''+(12)^{-1}h^2\theta M_4.$$

这种情况在 $\{\nu\}$ 关于 0 对称时产生。

最后，将某些結果列举于下。但在 $u^{(p)}=\cdots+O(h^{\kappa})$ 的式子中，总假設 $u\in C^{p+\kappa}$.

$$\begin{aligned}
u_0' &= (2h)^{-1}[-u_{-1}+u_1]+O(h^2)\\
&= (12h)^{-1}[u_{-2}-8u_{-1}+8u_1-u_2]+O(h^4)\\
&= h^{-1}[-u_0+u_1]+O(h)\\
&= (2h)^{-1}[-3u_0+4u_1-u_2]+O(h^2)\\
&= (12h)^{-1}[-3u_{-1}-10u_0+18u_1-6u_2+u_3]+O(h^4),\\
u_0'' &= h^{-2}[u_{-1}-2u_0+u_1]+O(h^2)\\
&= (12h^2)^{-1}[-u_{-2}+16u_{-1}-30u_0+16u_1-u_2]+O(h^4)\\
&= h^{-2}[2u_0-5u_1+4u_2-u_3]+O(h^2),\\
u_0''' &= (2h^3)^{-1}[-u_{-2}+2u_{-1}-2u_1+u_2]+O(h^2)\\
&= (8h^3)^{-1}[u_{-3}-8u_{-2}+13u_{-1}-13u_1+8u_2-u_3]+O(h^4)\\
&= (2h^3)^{-1}[-3u_{-1}+10u_0-12u_1+6u_2-u_3]+O(h^2),\\
u_0^{(4)} &= h^{-4}[u_{-2}-4u_{-1}+6u_0-4u_1+u_2]+O(h^2).
\end{aligned}$$

注意 对于在 G 上定义的函数 u 来說，$u=O(h^{\kappa})$ 的意义是：对于充分小的 h，存在着常数 M，不依賴于 h 和 G 的点，使得 $|u|\leq h^{\kappa}M$ 成立。

§30 近似差分算子的构成(偏微分)

1) 設 L 是以 x, y 为自变量的偏微分算子，G 为某一区域。以 $P_{m,n}(a+mh,\ b+nk)$ 为格子点作长方形格子。$U, \cdots, F_h$ 及范数与前节相同。现在如果已知各阶偏微商的近似式，馬上可以写出近似差分方程。但当 $h\to 0$ 时，k 也以相同的級趋近于零。如果不規定 k 对 h 的級，形式上虽相同的差分算子就不一定近似于微分算子。

例 1 設 $L[u]=\partial u/\partial y-\partial u/\partial x$，考虑 $(u_{m+1,n}+u_{m-1,n})/2=u_{m,n}+O(h)$. 令

$$l_h[u]=k^{-1}[u_{m,n+1}-(u_{m+1,n}+u_{m-1,n})/2]-(2h)^{-1}[u_{m+1,n}-u_{m-1,n}],$$

若 u 为充分光滑的函数，根据 Taylor 展开式，得

$$R=L[u]-l_h[u]=-\frac{k}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{h^2}{2k}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\cdots.$$

由此，当 $h\to 0$，$k/h=c$（常数）时，$R=O(h)$。当 $k/h^2=C$（常数）时，一般 R 是不趋近于零的。

注 1 后面遇到的抛物型和双曲型的問題，由于稳定性条件，要求格子間隔間成立一定的条件。那时不限定用 $k/h=$常数，即格子間隔的級相同的格子。但在本章所处理的椭圆型的情形，只考虑 $k/h=$常数，特别是 $k=h$ 时就够用了。

2) 特别讲一下基本微分运算子为拉普拉斯 Δ 的情形。設

$$M_{p,x}=\max_{x,y}\left|\frac{\partial^p u}{\partial x^p}\right|,\quad M_{q,y}=\max_{x,y}\left|\frac{\partial^q u}{\partial y^q}\right|,$$

另外用 M_n 表示 u 的所有 n 阶偏导数絕对值的上界。那末若只考虑近似于 x, y 之一的偏导数的情形，可以利用常微分时的結果。例如在 $P_{0,0}(x, y)$ 处，可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{h}[u_{1,0}-u_{0,0}]+\frac{h}{2}\vartheta M_{2,x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{k}[u_{0,1}-u_{0,0}]+\frac{k}{2}\vartheta M_{2,y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2h}[u_{1,0}-u_{-1,0}]+\frac{h^2}{3}\vartheta M_{3,x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{h^2}[u_{-1,0}-2u_{0,0}+u_{1,0}]+\frac{h^2}{12}\vartheta M_{4,x},$$

其中 ϑ 一般是表示 $|\vartheta|\leq 1$ 的量。从而对于 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，得

$$h^{-2}[u_{1,0}-2u_{0,0}+u_{-1,0}]+k^{-2}[u_{0,1}-2u_{0,0}+u_{0,-1}]=\Delta u+R,$$

其中

$$R=O(h^2+k^2)=\frac{h^2}{12}\vartheta M_{4,x}+\frac{k^2}{12}\vartheta M_{4,y}.$$

特别对于正方形格子 $h=k$ 的情形，利用

$$\Diamond_h u_{0,0}=u_{1,0}+u_{-1,0}+u_{0,1}+u_{0,-1}-4u_{0,0} \tag{30.1}$$

定义 $\diamondsuit_h u$ 后，得到(参照图 30.1)

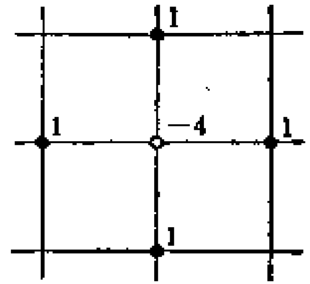


图 30.1

$$\Delta u = h^{-2}\diamondsuit_h u + R, \qquad (30.2)$$

$$|R| \leq h^2[M_{4,x}+M_{4,y}]/12 \leq h^2 M_4/6. \quad (30.3)$$

关于 x, y 两个变数的偏微商的近似式子，可按照前节 2) 的方法得出。但是这时与常微分情形不同，若其上取值的格子点排列得不恰当，可能不存在解。例如不可能用直綫 $y=$常数上的格子点的值逼近 $\partial u/\partial y$, $\partial^2 u/\partial x\partial y$. 另外，指定了微分阶数 p 和近似度 $\varkappa$ 后，有关格子点的个数要比 $p+\varkappa-1$ 大。所以象下面这样处理較为便利(以下只限于正方形格子)。例如从定义可得关于 x, y 的微商近似式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \approx \frac{1}{h}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{1,0} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{0,0}\right]$$

$$\approx \frac{1}{h}\left[\frac{u_{1,1}-u_{1,0}}{h} - \frac{u_{0,1}-u_{0,0}}{h}\right]$$

$$\approx h^{-2}[u_{1,1}+u_{0,0}-u_{1,0}-u_{0,1}] \equiv A_h[u].$$

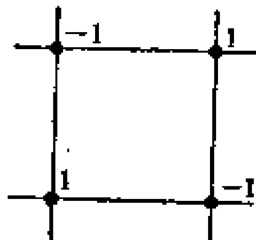


图 30.2

其次，預先将 $A_h[u]$ 的各項，在 $P_{0,0}$ 的周圍作 Taylor 展开，作出近似式，从而可看出它的近似度、誤差。实际上，由

$$A_h[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\right) + \cdots$$

可知右边是近似度为 1 的近似。一般若 L 是两个算子 L_1, L_2 的积时(作为新的算子)，如果 L_1, L_2 的近似算子分别是 l_{h_1}, l_{h_2}, 通常可取 l_{h_1}, l_{h_2} 的积作为 L 的近似算子。例如重調和算子

$$\Delta^2 u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}, \quad (30.4)$$

据 (30.2) $\Delta u \approx h^{-2}\diamondsuit_h u$, 故 $\Delta^2 u \approx h^{-4}\diamondsuit_h^2 u$ 有

$$\begin{aligned}\diamondsuit_h^2 u_{0,0} &= \diamondsuit_h u_{1,0}+\diamondsuit_h u_{-1,0}+\diamondsuit_h u_{0,1}+\diamondsuit_h u_{0,-1}-4\diamondsuit_h u_{0,0}\\ &=20u_{0,0}-8(u_{1,0}+u_{0,1}+u_{-1,0}+u_{0,-1})\\ &\quad+2(u_{1,1}+u_{-1,1}+u_{-1,-1}+u_{1,-1})\\ &\quad+(u_{2,0}+u_{0,2}+u_{-2,0}+u_{0,-2}).\end{aligned} \tag{30.5}$$

将右边的 $u_{m,n}$ 在 $P_{0,0}$ 的周圍作 Taylor 展开，可得

$$h^{-4}\diamondsuit_h^2 u=\Delta^2 u+R, \tag{30.6}$$

$$R=\frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial^6}{\partial x^6}+\frac{\partial^6}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6}{\partial x^2\partial y^4}+\frac{\partial^6}{\partial y^6}\right)u+\cdots=O(h^2). \tag{30.7}$$

从 Taylor 展开式余项的估計，就得到 R 的估計是

$$R=\frac{h^2}{9}\vartheta M_6,\quad |\vartheta|\leq 1. \tag{30.8}$$

§31 在滿足微分方程的函数类上的近似度

1) 要使差分法近似解法所得的数値結果具有高的准确度，加細格子間隔是一种方法。但是格子如果太細时，G_h 中含有的格子点增多了，将差分方程看作代数方程时，未知数也相对地多，在計算上就要花費很大的劳动。故希望采用这样的差分方程，格子間隔一定而且近似度較高。但是，根据前两节的方法，要作近似度較高的差分算子 l_h，一般在 G_h 的一点处，$l_h[u_h]$ 的表达式是很复杂的。由于这个理由，本节和下节将讲述对于滿足微分方程的函数类上，如何作出构造比較簡单，而且近似度高的差分算子。

2) 設滿足方程

$$L[u]=f \tag{I}$$

的 u 組成函数族 U，并考慮它的近似問題。由于 f 是固定的，不給以边界条件，所以上面 u 的个数一般是无限的。在前2节中，U 是非常光滑的任意函数集合，可是現在根据 L, f 的具体性质，反映了对 U 应該給以限制。象上面这样确定了 U 后所得的近似度，

称为**微分方程解的近似度**。

現在以位势方程 $\Delta u=0$ 及 Poisson 方程 $\Delta u=f$ 作为例子来說明。

首先令满足

$$Lu\equiv\Delta u=0 \tag{31.1}$$

的充分光滑的函数集合为 U. 也就是說 U 是由調和函数組成的。把(30.1)中定义的 $\diamondsuit_h u$ 在点 (x, y) 处的值，用 Taylor 展开式表示，得到了

$$\diamondsuit_h u=2\left[\frac{h^2}{2!}\Delta u+\frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+\frac{h^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)+\cdots\right]. \tag{31.2}$$

另一方面，用

$$\square_h u_{0,0}=u_{1,1}+u_{-1,1}+u_{-1,-1}+u_{1,-1}-4u_{0,0} \tag{31.3}$$

定义 $\square_h$ (图 31.1)，再由 Taylor 展开，得

$$\square_h u=4\left[\frac{h^2}{2!}\Delta u+\frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+\frac{h^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)+\cdots\right]. \tag{31.4}$$

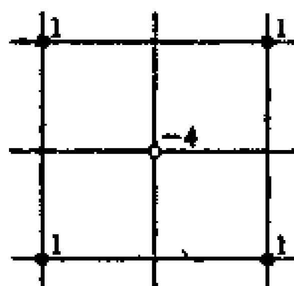


图 31.1

再这样地确定 a, b，使得 $a\diamondsuit_h u+b\square_h u$ 中以 h^2 为系数的项等于 Δu，而以 h^4 为系数的項与 $\Delta^2 u$ 成比例。于是解

$$2\frac{h^2}{2!}a+4\frac{h^2}{2!}b=1,\quad 2\left(\frac{2a}{4!}+4\frac{b}{4!}\right)=4\frac{6}{4!}b.$$

得

$$a=2/3h^2,\quad b=1/6h^2.$$

用此結果，并設

$$l_h[u]=\frac{1}{6h^2}(4\diamondsuit_h u+\square_h u), \tag{31.5}$$

由 (31.2), (31.4)(取更高次的項),通过简单地計算,可知

$$\left.\begin{aligned} l_h[u] &= \Delta u + \frac{2}{4!} h^2 \Delta^2 u + \frac{2}{6!} h^4\left(\Delta^3 u + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \Delta u\right) + R, \\ R &= \frac{2}{3} \frac{h^6}{8!}\left[3\Delta^4 u + 16 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \Delta^2 u + 20 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}\right] + \cdots. \end{aligned}\right\} \quad (31.6)$$

因而 $u \in U$, 即如果 $\Delta u = 0\ (u \in C^8)$, 則

$$l_h[u] - \Delta u = \frac{40}{3} \frac{1}{8!} h^6 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + \cdots = O(h^6).$$

l_h 对 Δ 的近似度是 6. 假若不限定 $\Delta u = 0$, 仅設 u 充分光滑时,那末近似度不超过 2.

其次,考慮

$$L[u] \equiv \Delta u = f \quad (f \text{ 是固定的}), \qquad (31.7)$$

并設 U 是由满足 $\Delta u = f$ 的 u 組成的。这时 U 不是綫型空間。若 l_h 根据(31.5)来定义, 如果 $u \in U$, 在 (31.6) 中用 $\Delta u = f$, 可得下式:

$$l_h[u] = \Delta u + \frac{2}{4!} h^2 \Delta f + \frac{2}{6!} h^4\left(\Delta^2 f + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} f\right) + O(h^6).$$

若設 $f \in C^6$, 由于 f 是已知的函数,所以可以把 Δf, $\Delta^2 f$ 看作是已知的。此处用

$$l_h'[u] = l_h[u] - \frac{2}{4!} h^2 \Delta f - \frac{2}{6!} h^4\left(\Delta^2 f + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right) \quad (31.8)$$

定义 l_h', 对于 $u \in U$, 則

$$l_h'[u] - \Delta u = O(h^6),$$

l_h' 对 Δ 的近似度是 6. 在这里要注意, l_h' 不是齐次綫性式。

若是計算 Δf, $\Delta^2 f$ 很麻煩的話, 或者只希望用格子点上 f 的值时,可以省略 (31.8) 右边的第三項,将 Δf 用 $h^{-2}\Diamond_h f$ 置換。由 (30.2), 成立 $h^2 \Delta f = \Diamond_h f + O(h^4)$, 所以,对于

$$l_h''[u]=l_h[u]-\frac{2}{4!}\Diamond_h f \tag{31.9}$$

得

$$l_h''[u]-\Delta u=O(h^4),\quad u\in U,$$

l_h'' 对 Δ 的近似度是 4. l_h'' 的近似方程

$$l_h''[u_h]=f\,|_{G_h} \tag{31.10}$$

在 $P_{0,0}$ 处的形状可以具体地写出。将 $u_h(P_{m,n})$ 記作 $u_{m,n}$，左边所含的 $f_{m,n}$ 移到右边，最后乘以 $2h^2$，消去分母，則得下式：

$$\begin{aligned}2(u_{1,1}&+u_{-1,-1}+u_{1,-1}+u_{-1,1})\\&+8(u_{1,0}+u_{-1,0}+u_{0,1}+u_{0,-1})-40u_{0,0}\\&=h^2[8f_{0,0}+(f_{1,0}+f_{-1,0}+f_{0,1}+f_{0,-1})].\end{aligned} \tag{31.11}$$

3) 在正三角形格子上 Δu 的近似 对于格子間隔为 h 的正三角形格子（§27 [例2]），它的任意格子点 P_0 上的 Δu 值，可以用 P_0 及其六个近傍点 $P_1, P_2, \cdots, P_6$ 上的 u 值近似。

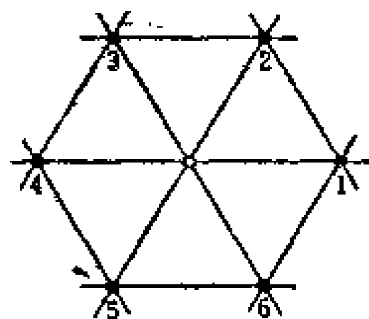


图 31.2

設由 P_0 到 $P_k(k=1, 2, \cdots, 6)$ 的单位向量为 (α_k, β_k)，則

$$u_k-u_0=h\left(\alpha_k\frac{\partial}{\partial x}+\beta_k\frac{\partial}{\partial y}\right)u+\frac{h^2}{2!}\left(\alpha_k\frac{\partial}{\partial x}+\beta_k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u+\cdots.$$

此式关于 k 由 1 到 6 相加，用

$$\sum_k\alpha_k=\sum_k\beta_k=\sum_k\alpha_k\beta_k=0,\quad \sum_k\alpha_k^2=\sum_k\beta_k^2=3,$$

則得

$$\sum_{k=1}^{6}u_k-6u_0=\frac{3}{2!}h^2\Delta u+\frac{9}{4}\frac{h^4}{4!}\Delta^2u+\frac{h^6}{6!}\left(\frac{33}{16}\frac{\partial^6u}{\partial x^6}+\cdots\right)+\cdots.$$

因而，如果設正三角形格子上的差分算子 l_h 为

$$l_h[u]_0=\frac{2}{3h^2}\left(\sum_{k=1}^{6}u_k-6u_0\right), \tag{31.12}$$

則

$$l_h[u]=\Delta u+h^2\Delta^2u/16+O(h^4).$$

由此可知，如果$u\in C^4$，l_h是Δ的近似度2的近似算子，如果$u\in C^6$，$\Delta u=0$，l_h对Δ的近似度是4.

§32 多点近似法

1) 本节所述的方法，Collatz 称之为**多点近似法** (Mehrstellenverfahren)．将此法应用在$\Delta u=f$上时，可以得到和(31.11)相同的差分方程。首先就常微分方程

$$u''-qu=f \tag{32.1}$$

的情形来說明。設h为格子間隔，x为任意格子点P_0的坐标，其左右的格子点分別为P_{-1}, P_1. 再設u是充分光滑的任意函数，那末問題是确定不依賴于u, x的常数a_{-1}, a_0, a_1, A_{-1}, A_0, A_1，使得式子

$$\sum_{k=-1}^{1}\{a_k u_k+A_k u_k''\}=O(h^4) \tag{32.2}$$

成立。其中$u_k''=u''(P_k)$.

将u_k, u_k''在P_0周圍的 Taylor 展开式

$$u_k=\sum_{\rho=0}\frac{(kh)^\rho}{\rho!}u_0^{(\rho)},\qquad u_k''=\sum_{\rho=0}\frac{(kh)^\rho}{\rho!}u_0^{(\rho+2)}$$

代入(32.2)的左边，得到

$$\sum_{\rho=0}^{1}\frac{h^\rho}{\rho!}u_0^{(\rho)}\sum_{k=-1}^{1}a_k k^\rho+\sum_{\rho=2}\frac{h^{\rho-2}}{\rho!}u_0^{(\rho)}\sum_{k=-1}^{1}\{h^2a_kk^\rho+\rho(\rho-1)A_kk^{\rho-2}\},$$

$h^\rho(\rho=0,\cdots,3)$的系数，对于任意的$u_0^{(\rho)}(\rho=0,1,\cdots)$为零的条件是下面的方程：

$$\left.\begin{aligned}&a_{-1}+a_0+a_1=0,\quad -a_{-1}+a_1=0,\\&h^2(a_{-1}+a_1)+2(A_{-1}+A_0+A_1)=0,\\&h^2(-a_{-1}+a_1)+6(-A_{-1}+A_1)=0,\\&h^2(a_{-1}+a_1)+12(A_{-1}+A_1)=0,\\&h^2(-a_{-1}+a_1)+20(-A_{-1}+A_1)=0.\end{aligned}\right\} \tag{32.3}$$

(32.3) 为齐次方程組。由第 2 式与第 4 式能导出第 6 式，所以把 a_k, A_k 之一取作任意常数，就存在着解。实际上，令 $a_1=1/h^2$，解之，得

$$a_1=a_{-1}=\frac{1}{h^2},\quad a_0=-\frac{2}{h^2},\quad A_1=A_{-1}=-\frac{1}{12},\quad A_0=-\frac{10}{12}.$$

将这些代入(32.2)，得

$$h^{-2}[u_{-1}-2u_0+u_1]-(12)^{-1}[u''_{-1}+10u''_0+u''_1]=O(h^4).\quad(32.4)$$

另一方面，如果 u 满足 (32.1)，由于 $u''_k=q_ku_k+f_k$，在它和使 (32.4) 右边为零的式中，消去 u''_k，就得誤差为 $O(h^4)$ 的 (32.1) 的近似方程。换句話說，以

$$l_h[u]_0=h^{-2}[u_{-1}-2u_0+u_1]$$
$$-(12)^{-1}[q_{-1}u_{-1}+f_{-1}+10q_0u_0+10f_0+q_1u_1+f_1]\quad(32.5)$$

定义 l_h，并以满足(32.1)的 u 的集合为 U，令 $L[u]=u''-qu-f$，則 l_h 是 L 在 U 上近似度为 4 的近似差分算子。但这时可认为 f 是固定的。如适当选擇 $\{k\}$，在(32.2)中用任意阶的微商 $u^{(p)}$ 代替 u''，可以同样的决定 a_k, A_k，以使式子右边为$O(h^\kappa)$. 例如可得

$$\left.\begin{aligned}&h^{-1}[u_1-u_{-1}]-3^{-1}[u'_{-1}+4u'_0+u'_1]=O(h^4),\\&h^{-3}[u_2-2u_1+2u_{-1}-u_{-2}]-2^{-1}[u'''_1+2u'''_0+u'''_{-1}]=O(h^4).\end{aligned}\right.\quad(32.6)$$

考虑了这些事实后，对任意的微分方程，就可以同样地来处理。例如对于 $pu''+qu'+ru=f$，从将 (32.4)，(32.6) 右边为零的式子和 $p_ku''_k+q_ku'_k+r_ku_k=f_k$ $(k=-1, 0, 1)$ 中，消去 u''_k, u'_k 所得的方程，可理解为近似差分方程在格子点 P_0 上的式子。

2) 現在将多点近似法应用在偏微分 $\Delta u=f$. 象(32.2)那样，确定 a, b, c, d, e，使得在格子点 $P_{m,n}$ 上

$$a\Delta u+bS_h^{(1)}[\Delta u]+cu+dS_h^{(1)}[u]+eS_h^{(2)}[u]=O(h^4)$$

成立。其中

$$\left.\begin{aligned}&S_h^{(1)}[u]_{m,n}=u_{m+1,n}+u_{m-1,n}+u_{m,n+1}+u_{m,n-1},\\&S_h^{(2)}[u]_{m,n}=u_{m+1,n+1}+u_{m-1,n+1}+u_{m-1,n-1}+u_{m+1,n-1}.\end{aligned}\right\}\quad(32.7)$$

和推导 (32.3) 一样，利用 Taylor 展开，导出 a, b, c, d, e 的方程組，解之得

$$8h^2\Delta u+h^2S_h^{(1)}[\Delta u]+40u-8S_h^{(1)}[u]-2S_h^{(2)}[u]=O(h^6). \quad (32.8)$$

令(32.8)的右边为零，将 $\Delta u_{m,n}=f_{m,n}$ 代入，得

$$8h^2f+h^2S_h^{(1)}[f]+40u-8S_h^{(1)}[u]-2S_h^{(2)}[u]=0.$$

很容易知道，这个式子和 (31.11) 是相同的。Collatz (卷末文献[2]) 給出了和(32.8)有同样作用的关于 Δu, $\Delta^2 u$ 的各种公式。

3) **例 1** 将多点近似法应用在固有値 $u''=\lambda u$, $u(0)=u(1)=0$ 上。

設格子点为 $x_n=nh(n=1, \cdots, N-1, h=1/N)$，参考(32.4)，则得近似固有值問題

$$\left.\begin{array}{l} h^{-2}\delta^{(2)}u_n=\rho\dfrac{1}{12}(u_{n+1}+10u_n+u_{n-1}) \quad (1\leq n\leq N-1), \\ u_0=u_N=0, \ 但 \ u_n=u_h(x_n). \end{array}\right\} \quad (32.9)$$

(32.9)可完全和§26例2同样解出。其固有(格子点)函数为 $u_h^{(k)}=C\cdot\sin k\pi x$，固有値为

$$\rho_k=\frac{12}{h^2}\frac{\cos k\pi h-1}{\cos k\pi h+5} \quad (k=1, \cdots, N-1).$$

由 $\rho_k-\lambda_k=O(h^4)(\lambda_k=-k^2\pi^2)$，得到了比§26例2的結果更好的近似值。

§33 近似边界条件，近似边界值問題的定义

1) 关于微分方程的边界値問題，是在区域 G 上成立的微分方程

$$L[u]=f \quad (I)$$

以外，再給出在 G 的边界 Γ 的若干部分(或者全体) $\Gamma_i(i=1, 2, \cdots, s)$ 上成立的边界条件

$$\gamma_i[u]=\varphi_i \quad (i=1, 2, \cdots, s). \quad (II)$$

关于 (I) 的近似差分方程已經說过了。在此要考虑的是近似 (II) 的(对于差分方程)边界条件。如果在下章所处理的初始值問題的初始条件，都认为是以时間 t 为自变量之一的空間区域上的边界

条件，那末在本节就是以此为討論的对象。Γ_i, Γ_j 在 $i\neq j$ 时，也可能是同一个集合，例如在整个 Γ 上給出边界条件 $u|_\Gamma=\varphi_1$, $\frac{\partial u}{\partial n}=\varphi_2$ 时，Γ_1, Γ_2 都是 Γ.

(II)左边的 γ_i, 是定义在 $G\cup\Gamma$ 上的函数 u 到定义在 Γ_i 上的函数 $\gamma_i[u]$ 的运算子。一般是阶数比 L 低的微分算子。为了准备引出近似于 γ_i 的差分算子，指出 U, Φ_i, U_h, Φ_{hi} 以及引入它們范数的意义，可复习一下 §28 的討論，在此不另作說明。再者，§28 約定的术語、記法等，对相同的問題，同样适用。設U是使 $\gamma_i[u]$ $(i=1, \cdots, s)$ 有意义并在 $G\cup\Gamma$ 上定义的函数 u 的集合，Φ_i 是任意 $u\in U$, 使 $\gamma_i[u]\in\Phi_i$, 在 Γ_i 上定义的函数集合。另外再分别定义 U, Φ_i 的范数 $\|\ \ \|_U$, $\|\ \ \|_{\Phi_i}$. 以后的討論中經常要使用到的范数和 §28 一样，是

$$\|u\|_U=\max_{G\cup\Gamma}|u|,\quad \|\varphi_i\|_{\Phi_i}=\max_{\Gamma_i}|\varphi_i|. \tag{33.1}$$

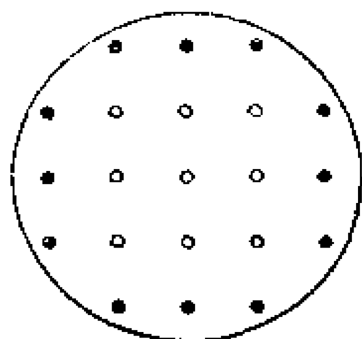
注 1 (II)中 $i=1$ 时，添字 i 可以省略。

2) 对于 G 的格子引入 G_h 的定义等，和 §28 2)相同。定义在 G_h 上的 u_h 的边界条件，怎样才能使它和(II)靠近呢？先就下面例子說明。

例 1 設G为区間$(0,1)$，格子点为 $x_n=nh(n=0,1,\cdots,N)$，考虑在 $x_0=0$ 上的边界条件。

若 $\gamma[u]\equiv u(0)=a$ (常数)，对于格子点函数 u_h 的类似边界条件可設为 $r_h[u_h]\equiv u_h(x_0)=a$. 另外，若 $\gamma[u]\equiv u'(0)=a$, 近似边界条件可取 $r_h[u_h]\equiv h^{-1}[u_h(x_1)-u_h(x_0)]=a$. 这是因为当 $h\to 0$ 时，对于 $x=0$ 上任意可微分的 u, 都有 $r_h[u]\to\gamma[u]$. 同样的理由，在 G_h 的边界点中，属于 G 的边界 Γ 上的某些点上，可作形式上近似于 $\gamma_i[u]$ 的差分算子 r_{hi}, 使 $r_{hi}[u_h]=\varphi_i$.

例 2 設 G 为圆 $x^2+y^2<1$, 取 $x=mh$, $y=nh$ 确定的正方形格子。考虑边界条件 $\gamma[u]\equiv u|_\Gamma=\varphi$. G_h 的边界 Γ_h 的点，一般不在 Γ 上，因而在 Γ_h 上 φ 是沒有定义的。在这里，将 φ 的値用下面方法移到 Γ_h 上。設 P_h 为 Γ_h 上的


图 33.1　$\bullet\in\Gamma_h$

任意点，在 Γ 上和 P_h 最近的点为 P，用"$\varphi_h(P_h)=\varphi(P)$"定义 Γ_h 上的函数 φ_h。一般按此規則由 Γ 上的函数 φ 作出的 Γ_h 上的函数用 $[\varphi]_h$ 表示。此时若对 u_h 的边界条件取 $r_h[u_h]\equiv u_h|_{\Gamma_h}=[\varphi]_h$ 时，可将它看作是 $\gamma[u]=\varphi$ 的近似。这是由于当 u 在 $G\cup\Gamma$ 上是連續函数时，随着 $h\to0$ 有 $[\gamma[u]]_h\to\gamma[u]$ 的緣故。从这个例子可以看出，若 Γ_h 不包含在 Γ 中，必須将 Γ 上的函数移到 Γ_h 上。

現在将上面例子所考虑的一般化。設 $\Gamma_{hi}(i=1, 2, \cdots, s)$ 是 G_h 的边界 Γ_h 的若干部分，(差分) 算子 r_{hi} 将定义在 G_h 上的函数 u_h 移到定义在 G_h 的边界 Γ_{hi} 上的函数 $r_{hi}[u_h]$. U_h 是定义在 G_h 上，使 $r_{hi}[u_h]$ 有意义的函数 u_h 的集合。Φ_{hi} 是当 $u_h\in U_h$ 时使 $r_{hi}[u_h]\in\Phi_{hi}$ 的 Γ_{hi} 上的函数集合。若 $u\in U$ 时，$r_{hi}[u]$ 的意义和 §28 的 $l_h[u]$ 有同样的解釋。再者，对于 U_h，Φ_{hi}，分别定义用 $\|\ \|_{U_h}$，$\|\ \|_{\Phi_{hi}}$ 表示的范数。另一方面，$[\ ]_{hi}$ 是使任意的 $\varphi_i\in\Phi_i$ 对应于 $[\varphi_i]_{hi}\in\Phi_{hi}$ 的算子。但对于范数及 $[\ ]_{hi}$ 要求具有下面条件。

$h\to0$ 时

对于任意的 $u\in U$，

$$\|u\|_{U_h}\to\|u\|_U, \tag{33.2}$$

对于任意的 $\varphi_i\in\Phi_i$，

$$\|[\varphi_i]_{hi}\|_{\Phi_{hi}}\to\|\varphi_i\|_{\Phi_i}\ \ (i=1, \cdots, s). \tag{33.3}$$

(33.2) 和 (28.2) 是相同的条件，若 $\|\ \|_U$，$\|\ \|_{U_h}$ 的定义也相似时，(33.2)是成立的。例如若

$$\|u_h\|_{U_h}=\max_{G_h}|u_h| \tag{33.4}$$

u 是連續时，对于 (33.1)，滿足 (33.2)。如果随着 $h\to0$，Γ_{hi} 接近于 Γ_i，$[\ ]_{hi}$ 是連續运算，那么当两边的范数相似时(33.3)一般是成立的。然而在具体問題上，必需根据 $[\ ]_{hi}$ 的定义，驗証(33.3)是否成立。以上述这些作为前提，有下面的定义。

定义 1 对于任意的 $u\in U$，当 $h\to 0$ 时，如果

$$\|[\gamma_i[u]]_{hi}\to r_{hi}[u]\|_{\Phi_{hi}}\to 0, \tag{33.5}$$

则将 $u_h\in U_h$ 的边界条件 $r_{hi}[u_h]=[\varphi_i]_{hi}$ 称为 $\gamma_i[u]=\varphi_i$ 在 U 上的**近似边界条件**。又对于任意的 $u\in U$，当 $0<h<h_0$ 时，如果存在 $h_0>0$，使得

$$\|[\gamma_i[u]]_{hi}-r_{hi}[u]\|_{\Phi_{hi}}\leq h^{\varkappa}M_i \quad (\varkappa>0) \tag{33.6}$$

成立，则說边界条件的**近似度**是 $\varkappa$. 其中 M_i 是不依赖于 h 的常数。

注 2 $\Gamma_{hi}\subseteqq\Gamma_i$ 时，取 $[\varphi_i]_{hi}=\varphi_i|_{\Gamma_{hi}}$.

注 3 (33.6) 左边为零时，称为近似准确。例如在 $\Gamma_{hi}\subseteqq\Gamma_i$ 上的边界条件是第一种时，出現这种情况。

3) **定义 2** 对于微分方程的边界值問題

$$L[u]=f, \tag{I}$$

$$\gamma_i[u]=\varphi_i \quad (i=1, 2, \cdots, s). \tag{II}$$

差分方程的边界值問題

$$l_h[u_h]=f_h, \tag{III}$$

$$r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi} \quad (i=1, 2, \cdots, s) \tag{IV}$$

其中

$$f_h=f|_{G_h^0}, \quad \varphi_{hi}=[\varphi_i]_{hi}$$

称为在 U 上的**近似边界值問題**。因为根据 § 28 的定义，(III) 是 (I) 在 U 上的近似差分方程。由本节定义，(IV) 是(对于所有的 i) (II) 在 U 上的近似边界条件。

差分法的近似解法，就是将近似边界值問題的解作为原来边界值問題的近似解的方法。

§ 34 近似边界条件的构成(常微分)

1) 設区域 G 是 x 軸上的区間 (a, b). 如果格子点我們取为

$x_n=a+nh(h=(b-a)/N,\ n=0,1,\cdots,N)$，则 G_h 的边界和原来区域的边界 $x=a,\ x=b$ 是一致的。因而此时不用 $[\ ]_M$，亦即 $[\varphi_i]_M=\varphi_i$. 現在仅就左边的边界点来說明如何构造近似边界条件。但范数取絕对值的最大值。

(i)　$u(a)=\varphi$ 的近似边界条件是 $u_h(x_0)=\varphi$，近似准确。

(ii)　$u'(a)=\varphi$ 的近似边界条件，可用近似左边微商的差商代替。但使用 $u_h(x_n)$，$n\geqq 0$.

令 $h^{-1}[u_h(x_1)-u_h(x_0)]=\varphi$，$u\in C^2$，近似度是 1.

令 $(2h)^{-1}[-3u_h(x_0)+4u_h(x_1)-u_h(x_2)]=\varphi$，$u\in C^3$，近似度是 2.

在处理右端边界点 b 上的条件 $u'(b)=\varphi$ 时，如果使用以 b 左边的 x_n 上的 u_h 值作为 $u'(b)$ 的近似式子时，結果完全一样。

(iii)　对于 $u''(a)=\varphi$，如果取 $h^{-2}[u_h(x_0)-2u_h(x_1)+u_h(x_2)]=\varphi$，近似度是 1 $(u\in C^3)$.

(iv)　对于 $u'(a)+\sigma u(a)=\varphi$ 或者更一般的边界条件，它們的近似边界条件的作法，从上述是显然的。

2）在上面的(ii)中，作 $u'(a)=\varphi$ 的近似时，使用了三个格子点 $x_0,\ x_1,\ x_2$ 的值，它的近似度是 2. 对于**多点近似法**也用这种作法时，可按下面来进行。例如設上面的边界条件是微分方程 $u''-qu=f$ 的边界条件，将 $x_{-1}=a-h$ 亦并入 G_h 内，然后用

$$[u_h(x_1)-u_h(x_{-1})]/2h=\varphi \tag{34.1}$$

代替 $u'(a)=\varphi$. 一方面在 x_0 处給出近似微分方程的关系式

$$h^{-2}[u_h(x_1)-2u_h(x_0)+u_h(x_{-1})]-q_0u_h(0)=f_0, \tag{34.2}$$

则当 u 是充分光滑的函数时，(34.1)，(34.2) 的近似度是 2. 实际上，从(34.1)，(34.2)中消去 $u_h(x_{-1})$，则

$$r_h[u_h]\equiv\frac{u_h(x_1)-u_h(x_0)}{h}-\frac{h}{2}[q_0u_h(x_0)+f_0]=\varphi. \tag{34.3}$$

若 U 取为滿足微分方程且充分光滑的 u 的集合，则(34.3)的 $r_h[u_h]$，如前节所述，可知近似度是 2.

这个方法的实用性很高，同时也适用于偏微分方程的情形，在此不作深入的討論了。但是这样作法的近似基础是 u 在边界上满足微分方程，而且也是充分光滑的函数。如果无区别地加以乱用，反而会带来很大的誤差。

§35 近似边界条件的构成(偏微分)

設 G 是 xy 平面上的区域，格子是用 $x_m=a+mh$, $y_n=b+nh$ 确定的。在格子点 (x_m, y_n) 上格子点函数 u_h 的值写为 $u_{m,n}$. 現在仅就边界条件(IV)的 Γ_1 是整个边界 Γ 的情形加以論述。至于一般情形，可由此类推。在这里假設 Γ 是充分光滑的。

1) 設使 Γ_h 上的函数 $[\varphi]_h$, 对应于 Γ 上的函数 φ 的 $[\ ]_h$ 是下面 (i) (ii) 中之一。P_h 是 Γ_h 上的任意点，在 P_h 上 $[\varphi]_h$ 的值写为 $[\varphi]_h(P_h)$.

(i) $[\varphi]_h(P_h)=$在 Γ 上最靠近 P_h 的点上 φ 的值。

(ii) $[\varphi]_h(P_h)=\Gamma$ 和作格子直綫族的交点中，最靠近 P_h 的点上 φ 的值。

不論 (i) 与 (ii), 若 $P_h\in\Gamma$, 則 $[\varphi]_h(P_h)=\varphi(P_h)$, 特别是若 $\Gamma_h\subset\Gamma$, 則 $[\varphi]_h=\varphi$. 再者，如果 φ 和 Γ 是充分光滑时，对于普通的范数，(33.3) 成立。

2) **第1种边界条件**

$$\gamma[u]\equiv u|_\Gamma=\varphi. \tag{35.1}$$

設 $[\ ]_h$ 是用 1) 确定的，$r_h[u_h]\equiv u_h|_{\Gamma_h}$. 也就是說，如果

$$u_h|_{\Gamma_h}=[\varphi]_h, \tag{35.2}$$

当 $u\in C^1$, 取絕对值的最大值为范数，則对于 (35.2), (35.1) 的近似度是 1. 实际上，如果 $|\mathrm{grad}\,u|\leqq M$, 則

$$|[\gamma[u]]_h-r_h[u]|\leqq hM. \tag{35.3}$$

有时在 Γ 的附近增加格子点，使格子区域的边界点都在 Γ 上。随着差分方程也必須加以修正。現在就微分方程是 $\Delta u=f$ 时加以說明。設作格子的

直綫族和 Γ 的交点集合为 S_h (若 Γ 的部分是綫段，当綫段和作格子的直綫之一重合时，则取和綫段正交直綫的交点)。若 $G_h\cup S_h=\overline{G}_h$，那末 $\overline{G}_h$ 的边界点为 S_h。因而 $u|_\Gamma=\varphi$ 的边界条件，可用 $u_h|_{S_h}=\varphi$ 准确近似。另外，近似 $\Delta u=f$ 的差分方程，关于 G_h 的内点，照旧不变的。即取 $h^{-2}\diamondsuit_h u_h=f$。設从 $\overline{G}_h$ 减去 S_h 及 G_h 内部 G_h^1 的集合为 S_h'，S_h' 上的任意点为 $P_0(x, y)$，则在 P_0 上必須重新作 $\Delta u=f$ 的近似方程。再設和 P_0 最近的四个格子点为 $P_\alpha(x+\alpha h, y)$，$P_{\alpha'}(x-\alpha' h, y)$，$P_\beta(x, y+\beta h)$，$P_{\beta'}(x, y-\beta' h)$。很明显 $0<\alpha, \alpha', \beta, \beta'\leqq h$。現在令 $u\in C^3$，根据 Taylor 展开，得

$$u_\alpha=u_0+\alpha h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\alpha h)^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(h^3),$$

$$u_{\alpha'}=u_0-\alpha' h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\alpha' h)^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(h^3).$$

从上面两个式子消去 $\partial u/\partial x$，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{h^2}\left[\frac{u_\alpha}{\alpha(\alpha+\alpha')}-\frac{u_0}{\alpha\alpha'}+\frac{u_{\alpha'}}{\alpha'(\alpha+\alpha')}\right]+O(h),$$

同样得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{h^2}\left[\frac{u_\beta}{\beta(\beta+\beta')}-\frac{u_0}{\beta\beta'}+\frac{u_{\beta'}}{\beta'(\beta+\beta')}\right]+O(h).$$

因而，若

$$l_h[u]_0=\frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{\alpha+\alpha'}\left(\frac{u_\alpha}{\alpha}+\frac{u_{\alpha'}}{\alpha'}\right)+\frac{1}{\beta+\beta'}\left(\frac{u_\beta}{\beta}+\frac{u_{\beta'}}{\beta'}\right)-\left(\frac{1}{\alpha\alpha'}+\frac{1}{\beta\beta'}\right)u_0\right],$$

则 $l_h[u]_0=f_0$ 是在 P_0 上以近似度 1 近似于 $\Delta u=f$。

注　从上述作法，可以得出，当格子間隔不是常数时近似方程的作法。

3) **第2种边界条件**　設 $\boldsymbol{n}$ 是 Γ 的向外法綫，$\partial/\partial n$ 是沿 $\boldsymbol{n}$ 方向求导，現在考虑

$$\gamma[u]\equiv\frac{\partial u}{\partial n}=\varphi. \tag{35.4}$$

作它的近似边界条件 $\gamma_h[u_h]=[\varphi]_h$，$[\varphi]_h$ 象 1) 中所說那样来取。設 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 α, β，则 α, β 是定义在 Γ 上(在法綫存在的点上)的函数。除去有限个角点，α, β 是对于弧长的充分光滑的函数。在角点处将 α, β 的值定义为，沿着 Γ 从两側趋近此点时极限的平均值，那末用 α, β 得

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{35.5}$$

要使右边用 Γ_h 上的任意点 P_0 近似，可分别用 1) 中所述的 $[\ ]_h$，将 α, β 置换为 $[\alpha]_h$, $[\beta]_h$，用 P_0 的近傍点中属于 G_h 的点的函数值作为 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 的近似就可以了。

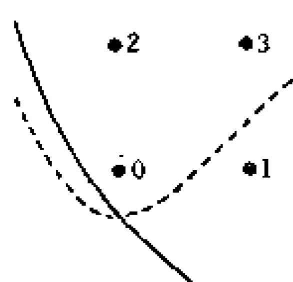


图 35.1

例如象左图那样，对于 $P_0\in\Gamma_h$，使

$$r_h[u_h]_0=[\alpha]_h\frac{u_1-u_0}{h}+[\beta]_h\frac{u_2-u_0}{h},$$

其中 $u_i=u_h(P_i)$ $(i=0, 1, 2)$. 再若图中的点綫为 Γ 时，P_0 的两侧近傍点不属于 G_h，这时，如果 $u\in C^2$，则根据 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2+O(h)$，可用 $h^{-1}(u_3-u_2)$ 代替 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$.

4) 对于第 3 种边界条件 $(\partial u/\partial n)+\sigma u=\varphi$ 等边界条件的近似的方法，从以上所述很明显可以得出。

§ 36 近似边界值問題解的存在

1) 近似于微分方程边界值問題的差分方程边界值問題

$$\left.\begin{aligned}&l_h[u_h]=f_h, &&\text{其中 } f_h=f\,|\,G_h,\\&r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi}, &&\text{其中 } \varphi_{hi}=[\varphi]_{hi}\quad(1\leq i\leq s),\end{aligned}\right\} \tag{36.1}$$

它的解是否存在，必須首先了解 l_h, r_{hi}, f_h, φ_{hi} 的具体性质，然后才能判定。大多数情况下，如果假設它具有和原来微分方程解的存在条件相似的条件时，就可以証明解 u_h 是存在的。特別是当 l_h, r_{hi} 是齐次綫性时，(36.1) 是以包含在 G_h 中格子点上 u_h 的值为未知数的綫性方程組。于是，当 G 是有界时❶，根据有限个元的綫性方程組理論，可以知道，对于任意的 f_h, φ_{hi}, (36.1) 都存在解的

❶ 假設方程組未知数的个数和方程的个数是相同的。

条件，是非齐次项 f_h, φ_{hl} 为零时，方程只有解 $u_h\equiv 0$. 且知这时的解是唯一的。所以解的唯一性和解的存在性在本质上是相同的，这是和微分方程显著不同的地方。

2) 設 G 是 x 軸上的区間 (a, b). 現在考虑近似于边界値問題

$$L[u]\equiv u''-qu=f, \quad \text{其中 } q\geqq 0, \tag{36.2}$$

$$u(a)=\alpha, \quad u(b)=\beta \tag{36.3}$$

的边界値問題

$$l_h[u_h]=h^{-2}[u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}]-q_nu_n=f_n \ (1\leqq n\leqq N-1), \tag{36.4}$$

$$u_0=\alpha, \quad u_N=\beta. \tag{36.5}$$

但以 $x_n=a+nh\,(Nh=b-a,\ n=0, 1, \cdots, N)$ 为格子点，u_n 表示 $u_h(x_n)$. 为了説明(36.4)，(36.5)解的存在，現在根据 1)，从 $f_n\equiv 0$, $\alpha=\beta=0$ 来推导 $u_n\equiv 0$.

設

$$u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}-h^2q_nu_n=0 \quad (1\leqq n\leqq N-1), \tag{36.4'}$$

$$u_0=u_N=0. \tag{36.5'}$$

那么，对于任意的 u_n, $v_n\,(0\leqq n\leqq N)$, 成立

$$\sum_{n=1}^{N-1} v_n\delta^{(2)}u_n=v_ND'u_N-v_0Du_0-\sum_{n=0}^{N-1} Dv_n\cdot Du_n \tag{36.6}$$

(关于 $\delta^{(2)}$, D', D 可参看 § 26 注). (36.6) 是对应于部分积分的关系式，这是很容易直接驗証的。在 (36.4′) 上乘以 u_n, 对于 n 由 1 到 $N-1$ 相加，考虑一下 (36.6)，(36.5′)，可得

$$\sum_{n=0}^{N-1} (u_{n+1}-u_n)^2+h^2\sum_{n=0}^{N-1} q_nu_n^2=0. \tag{36.7}$$

又由于 $q\geqq 0$, 因此必須 $u_{n+1}=u_n\,(0\leqq n\leqq N-1)$, 所以 $u_n=$常数。再由(36.5′)得出 $u_n\equiv 0$.

其次，代替 (36.3)，若取微分方程边界条件是

$$u'(a)-\sigma_1u(a)=\alpha, \quad u'(b)+\sigma_2u(b)=\beta, \quad \text{其中 } \sigma_1,\ \sigma_2\geqq 0,$$

将它置换为

$$\left.\begin{aligned}&(2h)^{-1}[-3u_0+4u_1-u_2]-\sigma_1 u_0=\alpha,\\&(2h)^{-1}[3u_N-4u_{N-1}+u_{N-2}]+\sigma_2 u_N=\beta.\end{aligned}\right\}\tag{36.8}$$

为了說明(36.4),(36.8)解的存在性,可以在(36.8)中令$\alpha=\beta=0$,再由

$$\left.\begin{aligned}&3u_0-4u_1+u_2+2h\sigma_1 u_0=0,\\&3u_N-4u_{N-1}+u_{N-2}+2h\sigma_2 u_N=0\end{aligned}\right\}\tag{36.9}$$

和(36.4′),可証$u_n\equiv 0$. 在(36.4′)中令$n=1$的式子和(36.9)的第一式中消去u_2,得出$u_1=u_0(1+\sigma_1 h)\Big/\left(1-\frac{1}{2}q_1h^2\right)$.用这个結果,再令

$$u_1-u_0=u_0\left(\sigma_1 h+\frac{1}{2}q_1h^2\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}q_1h^2\right)\equiv Au_0,\tag{36.10}$$

当$q_1h^2<2$时,得出$A\geqq 0$. 同样,令

$$u_N-u_{N-1}=-u_N\left(\sigma_2 h+\frac{1}{2}q_{N-1}h^2\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}q_{N-1}h^2\right)\equiv -Bu_N,\tag{36.11}$$

当$q_{N-1}h^2<2$时,可知$B\geqq 0$. 然后在(36.4′)上乘以u_n,将n由1到$N-1$相加,考虑一下(36.6),(36.10),(36.11),則得到

$$\sum_{n=0}^{N-1}(u_{n+1}-u_n)^2+h^2\sum_{n=1}^{N-1}q_nu_n^2+Au_0^2+Bu_N^2=0.\tag{36.12}$$

在这里如果$\max(q_1h^2, q_{N-1}h^2)<2$,則$A\geqq 0$, $B\geqq 0$,再有$q\geqq 0$,所以(36.12)左边的各項是$\geqq 0$,因而必須是零。根据$u_{n+1}=u_n$ $(0\leqq n\leqq N-1)$,可知$u_n\equiv C$(常数),如果$C\neq 0$,則$q_n\equiv 0$, $A=B=0$. 又由(36.10),(36.11)如果$A=B=0$, $q_1=q_{N-1}=0$,則$\sigma_1=\sigma_2=0$,所以除了

$$q_n\equiv 0\quad(1\leqq n\leqq N-1),\qquad \sigma_1=\sigma_2=0\tag{36.13}$$

的情形以外,$u_n\equiv 0$.

問題　試述在(36.13)的情况下，(36.4)，(36.8)的解存在时，α，β，f_n必須滿足的条件。

最后討論对于(36.2)，(36.3)用(32.5)的多点近似法时，它的解的存在性問題。若 $f=0$，(32.5)可写为

$$\delta^{(2)}\left(u-\frac{h^2}{12}qu\right)_n-h^2q_nu_n=0 \quad (1\leqq n\leqq N-1). \qquad (36.14)$$

由这个式子和 $u_0=u_N=0$ 可导出 $u_n\equiv 0$。在(36.14)上乘以 $u_n-(12)^{-1}h^2q_nu_n$，然后取和，和上面同样，可得出

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left\{D\left(u-\frac{h^2}{12}q_n\right)_n\right\}^2+h^2\sum_{n=1}^{N-1}q_n\left(1-\frac{h^2}{12}q_n\right)u_n^2=0.$$

再假設 $h^2q_n<12(1\leqq n\leqq N-1)$，用前面所說的方法，可知 $u_n\equiv 0$。

3) 考虑椭圓型微分算子

$$L[u]=A\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+C\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}-qu \qquad (36.15)$$

的边界值問題

$$L[u]=f, \quad \gamma[u]\equiv u|_\Gamma=\varphi, \qquad (36.16)$$

假設其中 A, C, D, E, q 是定义在 G（有界）的函数，并且

$$A>0, \quad C>0, \quad q\geqq 0. \qquad (36.17)$$

取以 $P_{m,n}(a+mh, b+nh)$ 为格子点的正方形格子，用下面的置换：

$$\frac{\partial u}{\partial x}\approx(u_{m+1,n}-u_{m-1,n})/2h,$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\approx(u_{m+1,n}-2u_{m,n}+u_{m-1,n})/h^2$$

作 $L[u]$ 的近似算子 l_h.

令

$$\left.\begin{aligned}&B^{(0)}=2\left(A+C+\frac{h^2}{2}q\right), \quad B^{(1)}=A+\frac{h}{2}D, \quad B^{(2)}=C+\frac{h}{2}E,\\&B^{(3)}=A-\frac{h}{2}D, \quad B^{(4)}=C-\frac{h}{2}E,\end{aligned}\right\} \qquad (36.18)$$

用記法 $u_{m,n}=u_h(P_{m,n})$，　$B^{(i)}_{m,n}=B^{(i)}(P_{m,n})$　$(0\leqq i\leqq 4)$ 則得到

$$l_h[u_h] \equiv B^{(1)}_{m,n}u_{m+1,n} + B^{(2)}_{m,n}u_{m,n+1} + B^{(3)}_{m,n}u_{m-1,n} + B^{(4)}_{m,n}u_{m,n-1} - B^{(0)}_{m,n}u_{m,n}. \quad (36.19)$$

近似边界值問題 $l_h[u_h]=f_h$, $u_h|_{\Gamma_h}=\varphi_h$ 的解是否存在，需要研究从 $f_h\equiv0$, $\varphi_h\equiv0$ 是否能导出 $u_h\equiv0$. 因此，先証明下面的引理。

引理 若有(36.17)和 $|hD|\leq 2A$, $|hE|\leq 2C$, 則滿足 $l_h[u_h]=0$ 的任意 u_h, 在 G_h 的内部 G_h^i 上旣不能取正的最大值，也不能取負的最小值。但 $u_h\equiv$常数时除外。

証明 若用 $-u_h$ 代替 u_h，則关于負的最小値問題就变为关于正的最大值問題。因而只考慮第一种情况就可以。現在用归謬法証明。設 u_h 不是常数，在 G_h^i 上取正的最大值 M. 这时总能找到一个点 $P_{m,n}\in G_h^i$ 使 $u_h(P_{m,n})=M$，且在 $P_{m,n}$ 的四个近傍点中，至少存在着一个点，使在这点上的 u_h 值比 M 小(否則 $u_h\equiv M$)。由(36.18)得

$$B^{(0)}=B^{(1)}+B^{(2)}+B^{(3)}+B^{(4)}+h^2q.$$

另一方面，根据 $B^{(4)}\geq 0$ 的假設，所以

$$l_h[u_h]_{m,n}<B^{(1)}M+\cdots+B^{(4)}M-B^{(0)}M=-h^2q_{m,n}M\leq 0.$$

这样，得 $l_h[u_h]_{m,n}<0$, 但这和 $l_h[u_h]=0$ 是矛盾的。 (証毕)

上面的引理是說，若是 $l_h[u_h]=0$, 那末 $|u_h|$ 的最大值在 Γ_h 上达到。現在因为在 Γ_h 上 $u_h\equiv0$, 所以可得到所求的結果 $u_h\equiv0$ (在 G_h 上)。

一般椭圓型微分方程边界值問題的近似边界值問題解的存在性，大多数归結为象 2) 那样定符号的 2 次型討論，或者象 3) 那样用最大值原理来証明。

問題 試用 3) 的論証方法，指出(36.4)，(36.5)的解是存在的。

§37 适定性，稳定性

1) 近似边界值問題的解 u_h，随着 $h\to0$，是否收斂于原微分方程边界值問題的解 u? 这个問題不論在应用上或者在理論上都是很重要的。在討論这个收斂性問題时，可不假定微分方程解的

存在，而且反过来也可看到用 u_h 的收斂性来証明 u 存在的方法。但在本书中，由于从应用数学的目的出发，且限于篇幅，在討論收斂性时，总先假定微分方程的解是存在的。下面研究收斂性問題的中心"适定"的概念。由于这个概念的引入，不但能够使叙述統一，而且所得到的結果，对于下一章的初始值問題也具有一般性。

另外 § 28, § 33 所述的內容，是本节討論所需要的准备知識，因此，在那里所有的概念、記号、假設等在此照旧使用。

2）适定的定义　考虑差分方程的边界值問題

$$l_h[u_h]=f_h, \tag{III}$$

$$r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s). \tag{IV}$$

如果对于充分小的 h,（III），（IV）的解 u_h，对于任意的 $f_h\in F_h$，$\varphi_{hi}\in\Phi_{hi}$ 都存在，而且对于 f_h，φ_{hi} 連續依賴时（关于 h 一致），（III），（IV）称为**适定**（correct）的。即

定义 1　滿足下面条件(i)，(ii)时，(III)，(IV)称为适定。

（i）存在着某个 $h_0>0$，当 $0<h<h_0$ 时，解 $u_h\in U_h$ 对于任意的 $f_h\in F_h$，$\varphi_{hi}\in\Phi_{hi}$ 都存在。

（ii）对于任意的 $\varepsilon>0$，存在着滿足下面条件且不依賴于 h 的正数 δ.

$$u_h\in U_h,\quad l_h[u_h]=f_h,\quad r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi},$$
$$f_h\in F_h,\quad \varphi_{hi}\in\Phi_{hi};$$
$$\tilde{u}_h\in U_h,\quad l_h[\tilde{u}_h]=\tilde{f}_h,\quad r_{hi}[\tilde{u}_h]=\tilde{\varphi}_{hi},\quad \tilde{f}_h\in F_h,\quad \tilde{\varphi}_{hi}\in\Phi_{hi};$$
$$\|\tilde{f}_h-f_h\|_{F_h}<\delta,\quad \|\tilde{\varphi}_{hi}-\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}}<\delta\quad (1\leqq i\leqq s). \tag{37.1}$$

当 $0<h<h_0$ 时

$$\|\tilde{u}_h-u_h\|_{U_h}<\varepsilon. \tag{37.2}$$

注意　正确的說，当提到适定时，必須指出格子点函数的集合 U_h，F_h，Φ_{hi} 和其中定义的范数。实际上对于同一个問題来說，由于范数的規定不同，

有时是适定的，有时不是适定的。所以在处理具体問題时，要根据采用的函数集合，范数来驗証(37.1)，(37.2)的条件。

若 l_h, r_{hi} 是綫性的，象我們已知那样，連續性和有界性是等价的❶。因而当綫性时，定义中的条件 (ii) 可以用下面的 (ii′) 来代替：

(ii′) 当 $0<h<h_0$ 时，存在着不依賴于 h 的常数 N, N_i，使得下式成立：

$$\|u_h\|_{U_h}\leqq N\|f_h\|_{F_h}+\sum_{i=1}^{s}N_i\|\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}} \tag{37.3}$$

再者，如果 G 有界，l_h, r_{hi} 綫性，可以应用有限个元的綫性方程組的理論，在(37.3)中令 $f_h=0$, $\varphi_{hi}=0$ 可得 $u_h=0$. 所以从(ii′)也可以导出(i). 另外，从(37.3)可以知道，对于綫性問題，可以使条件(ii)中的 $\tilde{f}$, $\tilde{\varphi}_{hi}$, $\tilde{u}_h$ 为零，也就是說，当 $\|f_h\|_{F_h}<\delta$, $\|\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}}<\delta$ 时，$\|u_h\|<\varepsilon$.

例 1 微分方程的边界(初始)值問題

$$u'(x)=f(x),\quad u(0)=\varphi$$

以 $x_n=nh(n=0, 1, \cdots, h>0)$ 为格子点时，它的近似方程为

$$\left.\begin{aligned}&l_h[u_h]\equiv(u_{n+1}-u_n)/h=f_n\quad(n=0, 1, \cdots),\\&r_h[u_h]\equiv u_0=\varphi,\quad 但\ u_n=u_h(x_n),\quad f_n=f(x_n).\end{aligned}\right\} \tag{37.4}$$

如果 G_h 是含于 $0\leqq x\leqq 1$ 中格子点的集合，n 的范圍可以由 $0\leqq nh\leqq 1$ 来确定。那末(37.4)的解很明显是

$$u_n=\varphi+\sum_{k=0}^{n-1}hf_k. \tag{37.5}$$

因而，如果 $|\varphi|<\delta$, $\max\limits_n|f_n|<\delta$, 則 $|u_n|<\delta+nh\delta$. 所以由 $nh\leqq 1$, 得 $|u_n|<2\delta$. 根据上面的結果，設 U_h, F_h 是定义在 G_h 上的所有函数集合，Φ_h 是定义在 $\{x_0\}$ 上的所有函数集合，若范数取絕对值的最大值，可得出(37.4)是适定的。

若 G_h 是含在半直綫 $0\leqq x$ 上的格子点，范数不变，那末 (37.4) 就不是适

❶ 在泛函分析中有一般証法，参看本丛书的《泛函分析》定理1.5.[或 Люстерник, Л. А-Соболев В. И. «泛函分析概要»(有中譯本)。——譯者注]

定的。例如当 $f_h=1$，由(37.5)可知 $u_n=\varphi+nh$，也就是 $u_h=\varphi+x$，当 $x\to\infty$ 时，$u_h\to\infty$。可是，若只将 $\|u_h\|_{U_h}$ 的范数改变为

$$\|u_h\|_{U_h}=\max_n\frac{|u_n|}{1+x_n},$$

当 $\|f\|_{F_h}<\delta$，$|\varphi\|_{\Phi_h}<\delta$ 时，可得 $\|u_h\|<\delta$，这时 (37.4) 是适定的。

注　如果没有指出确定 F_h 的条件，F_h 可以看成是定义在 G_h^0 上的所有函数集合。关于 U_h，Φ_{hi} 也是一样。

3) **稳定性的定义**　和适定概念相近的概念是下面的稳定性概念。关于稳定性，将在下章討論初始值問題时具体討論，在这里只是作为适定的补助概念引入。

若(III)，(IV)的解使边界条件的右边 $\varphi_{hi}(i=1, 2, \cdots, s)$ 固定时，連續依賴于差分方程右边的 f_h（关于 h 一致），則(III)，(IV)叫作关于方程是稳定的。再者只考慮(IV)的某几个，使另外的边界条件和方程的右边固定时，若(III)，(IV)的解連續依賴于不固定的边界条件（对于 h 一致），則(III)，(IV)叫作关于后者（右边不固定）边界条件是稳定的。即

定义 2　下面条件(i)，(ii)成立时，(III)，(IV) **关于方程是稳定的**。

（i）和定义 1 中的 (i) 相同。

（ii）在定义 1 的(ii)中，当 $\tilde{\varphi}_{hi}=\varphi_{hi}(i=1, 2, \cdots, s)$ 时，如果 $\|f_h-\tilde{f}_h\|_{F_h}<\delta$，成立 $\|u_h-\tilde{u}_h\|_{U_h}<\varepsilon$。

定义 3　設 I' 是 $I=\{1, 2, \cdots, s\}$ 的任意非空子集合（例如 $I'=\{p\}$，$1\leqq p\leqq s$）。当下面条件(i)，(ii)成立时，則(III)，(IV)叫作**关于边界条件**

$$r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi},\quad i\in I' \tag{37.6}$$

是稳定的。

（i）和定义 1 中的 (i) 相同。

（ii）在定义 1 的 (ii) 中，当 $\tilde{f}_h=f_h$，$\tilde{\varphi}_{hi}=\varphi_{hi}(i\in I-I')$ 时，

如果 $\|\tilde{\varphi}_{hi}-\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}}<\delta\ (i\in I')$,则成立 $\|\tilde{u}_h-u_h\|<\varepsilon$.

若 l_h, r_h 是綫性时,和适定的情形一样,連續性可用有界性来代替。即在解是存在的假設下,定义 2, 3 分别归結为下面的問題。

(ii') 所謂关于方程是稳定的,是指对于

$$l_h[u_h]=f_h,\quad r_{hi}[u_h]=0\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$$

的解,存在着使

$$\|u_h\|_{U_h}\leqq N\|f_h\|_{F_h}\tag{37.7}$$

成立而不依賴于 u_h, $h\ (0<h<h_0)$ 的常数 N.

(ii'') 所謂关于边界条件(37.6)是稳定的,是指对于

$$l_h[u_h]=0,$$

$$r_{hi}[u_h]=0\quad (i\in I-I'),\quad r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi}\quad (i\in I')$$

的解,存在着使

$$\|u_h\|_{U_h}\leqq\sum_{i\in I'}N_i\|\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}}\tag{37.8}$$

成立而不依賴于 u_h, $h\ (0<h<h_0)$ 的常数 $N_i\ (i\in I')$.

若(III),(IV)适定,不論关于方程或者边界条件都是稳定的。反之,如果 l_h, r_{hi} 是綫性时也正确。即

定理 1 若 l_h, $r_{hi}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 是綫性,(III),(IV)关于方程或者关于每个边界条件都是稳定的,则(III),(IV)是适定的。

詳細的証明,讀者可自行练习。在綫性时,只要考慮(III),(IV)的解是使方程为齐次时的解和使边界条件为齐次时的解的迭合。由(37.7),(37.8)导出(37.3).

§38 关于收斂性,誤差估計的定理

根据微分方程边界值問題(I),(II)

$$L[u]=f,\tag{I}$$

$$\gamma_i[u]=\varphi_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)\tag{II}$$

的解和它的近似边界值問題

$$l_h[u_h]=f, \tag{III}$$

$$r_{hi}[u_h]=[\varphi_i]_{hi} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s) \tag{IV}$$

的解的关系，下面定理給出了差分法的近似解法的理論根据。

定理 1　若滿足下面的条件 (i)～(iii)，$h\to 0$ 时，(III)，(IV) 的解 u_h 收斂于(I)，(II)的解 u，即

$$\|u-u_h\|_{U_h}\to 0. \tag{38.1}$$

(i)　存在(I)，(II)的解 u，$u\in U$.

(ii)　在 U 中，根据 § 28，§ 33 的定义，(III)，(IV)分别是(I)，(II)的近似方程，近似边界条件。

(iii)　关于 U_h，(III)，(IV)是适定的。

但 U，U_h 和其他必要的函数族，以及在这些函数族上定义的范数，都滿足 § 28，§ 33 的假設。

証明　設 $[\varphi_i]_{hi}=\varphi_{hi}$，$l_h[u]=\tilde{f}$，$r_{hi}[u]=\tilde{\varphi}_{hi}$. 一方面在格子点处，有 $f=l_h[u_h]=L[u]$，另外 $\varphi_{hi}=[\gamma_i[u]]_{hi}$. 令 $0<h<h_0$，由(ii)的假設，当 $h\to 0$ 时

$$\tilde{f}-f=l_h[u]-L[u]\to 0 \quad (\text{关于}\ \|\ \ \|_{F_h}),$$

$$\tilde{\varphi}_{hi}-\varphi_{hi}=r_{hi}[u]-[\gamma_i[u]]_{hi}\to 0 \quad (\text{关于}\ \|\ \ \|_{\Phi_{hi}}).$$

因此，h 充分小时，在(37.1)中的 δ，有

$$\|\tilde{f}-f\|_{F_h}<\delta, \quad \|\tilde{\varphi}_{hi}-\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}}<\delta.$$

由适定的假設，得

$$\|u-u_h\|_{U_h}<\varepsilon. \tag{証毕}$$

系　如果 l_h，$r_{hi}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 是綫性，(IV) 的边界条件中关于 $i=p+1,\ \cdots,\ s$，是 (II) 的边界条件的准确近似时，則定理 1 的条件(iii)，可以用(iii′)“关于方程和每个边界条件($i=1,2,\cdots,p$)，(III)，(IV)都是稳定的”来代替。

关于誤差的估計，有下面的定理。

定理 2 在定理 1 的假設外,設 l_h, $r_{hi}(1\leqq i\leqq s)$ 是綫性的。若(III), (IV) 对于 (I), (II) 的近似度都是 $\varkappa$ 时,則

$$\|u-u_h\|_{U_h}\leqq h^{\varkappa}\Big(MN+\sum_{i=1}^{s}M_iN_i\Big), \tag{38.2}$$

其中 N, N_i 是(37.3)中的常数, M, M_i 分別是(28.4), (33.6)中的常数。

証明 設 $v_h=u_h-u$, 由 $l_h[u_h]=f=L[u]$, 知

$$l_h[v_h]=f-l_h[v]=L[u]-l_h[u].$$

又由

$$r_{hi}[u_h]=[\varphi_i]_{hi}=[\gamma_i[u]]_{hi},$$

知

$$r_{hi}[v_h]=[\varphi_i]_{hi}-r_{hi}[u]=[\gamma_i[u]]_{hi}-r_{hi}[u].$$

所以从 (28.4), (33.6), 可得

$$\|l_h[v_h]\|_{F_h}\leqq h^{\varkappa}M,\quad \|r_{hi}[v_h]\|_{\Phi_{hi}}\leqq h^{\varkappa}M_i.$$

由上面的不等式和 (37.3) 中的 u_h, f_h, φ_{hi} 分别换为 v_h, $l_h[v_h]$, $r_{hi}[v_h]$的不等式,就可得出(38.2). (証毕)

如果知道了不等式(38.2)右边的常数,就給出了誤差$u-u_h$的界限. 可是一般在实际上, M, M_i 都是未知解 u 的高阶微商上界,若是不能解出原来的边界值問題时(如果能解出时,不必用差分法近似),它的值是很难估計的。在实际应用上,大多数是代替 u 的高阶微商,来考察对应于差分方程解 u_h 的差分商,估計 M, M_i 的值。这样所得到的估計式,至少是沒有理論根据的。但是,若所求的解是充分光滑,只要知道 M, M_i 是存在的,誤差中 h 的級就可以从(38.2)来判定。

注 由定理1可知,反过来对于 (I), (II) 的解 u, 下面定理是成立的。証明从略。

定理 3 关于綫性的 L, γ_i, l_h, r_{hi}, 在和定理1相同的条件下,成立

$$\|u\|_U\leqq N\|f\|_F+\sum_{i=1}^{s}N_i\|\varphi_i\|_{\Phi_i}, \tag{38.3}$$

其中 N, N_i 是 (37.3) 中的常数。

定理 4　对于 (I), (II), 若能够作出满足定理 1 的条件的差分方程边界值問題, 则 (I), (II) 的解在 U 上是唯一的。

另外, 从 Φ_i 到 Φ_{hi} 的算子 $[\ ]_{hi}$, 如果当 $0<h<h_0$ 时, 关于 h 同等連續, 则 (I), (II) 的解連續依賴于 f, φ_i. 即边界值問題 (I), (II) 是适定的。

§39　誤差的漸近形式

从 §1 例 1 中的 (ii), 可以看出誤差是 $u_h-u=h^2x(1-x)$. 那么由前节的定理 2, 是否可以在它的假設下, 使誤差是

$$u_h-u=h^\varkappa w+o(h^\varkappa)\quad (h\to 0). \tag{39.1}$$

下面定理就是要解决这个問題。

定理 1　若满足下面的条件 (i)～(iv), 則对条件 (iv) 内定义的函数 w, 当 $h\to 0$ 时

$$\|h^{-\varkappa}(u_h-u)-w\|_{U_h}\to 0, \tag{39.2}$$

也就是 $h^{-\varkappa}(u_h-u)\to w$. 其中 u, u_h 分别是 (I), (II); (III), (IV) 的解。

(i) (III), (IV) 是綫性的。

(ii) 滿足 §38 定理 1 的假設。

(iii) 对于 (I), (II) 的解 u, 存在有

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}h^{-\varkappa}(L[u]-l_h[u])=\psi,\\&\lim_{h\to 0}h^{-\varkappa}([\gamma_i[u]]_{hi}-r_{hi}[u])=\psi_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s),\end{aligned}\right\} \tag{39.3}$$

$\psi\in F$, $\psi_i\in\Phi_i$. 但 (39.3) 的收斂是指

$$\|h^{-\varkappa}(L[u]-l_h[u])-\psi\|_{F_h}\to 0,$$

$$\|h^{-\varkappa}([\gamma_i[u]]_{hi}-r_{hi}[u])-[\psi_i]_{hi}\|_{\Phi_{hi}}\to 0.$$

(iv) 存在着属于 U 的 $L[w]=\psi$, $\gamma_i[w]=\psi_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 的解 w.

証明 設 $l_h[u]=\tilde{f}$, $r_{hi}[u]=\tilde{\varphi}_{hi}$, 由 (39.3) 令

$$h^{-\varkappa}(f-\tilde{f})=\psi+\alpha_h, \quad h^{-\varkappa}(\varphi_{hi}-\tilde{\varphi}_{hi})=[\psi_i]_{hi}+\alpha_{hi}$$

(其中 $\varphi_{hi}=[\varphi_i]_{hi}$, $i=1, 2, \cdots, s$), 則当 $h\to 0$ 时

$$\|\alpha_h\|_{F_h}\to 0, \quad \|\alpha_{hi}\|_{\Phi_{hi}}\to 0 \quad (i=1, 2, \cdots, s).$$

另一方面, 由 $w\in U$ 和近似性的定义, 設

$$l_h[w]=\psi+\beta_h, \quad r_{hi}[w]=[\psi_i]_{hi}+\beta_{hi},$$

則当 $h\to 0$ 时,

$$\|\beta_h\|_{F_h}\to 0, \quad \|\beta_{hi}\|_{\Phi_{hi}}\to 0 \quad (i=1, 2, \cdots, s).$$

因 l_h 是綫性的, 所以

$$l_h[h^{-\varkappa}(u_h-u)-w]=h^{-\varkappa}(f-\tilde{f})-l_h[w]=\alpha_h-\beta_h,$$

同样可得

$$r_{hi}[h^{-\varkappa}(u_h-u)-w]=\alpha_{hi}-\beta_{hi} \quad (i=1, 2, \cdots, s).$$

由于当 $h\to 0$ 时, 上面各式的右边趋于零, 所以根据适定的假設, 有 $h^{-\varkappa}(u_h-u)-w\to 0$. (証毕)

注意 1 一般若 u 充分光滑, $\varkappa$ 是 l_h, r_{hi} 的近似度时, 通常条件(iii), (iv) 是成立的。w, ψ, ψ_i 的严密形式如果不求出 u 是很难得到的。但若已知 u 求 ψ, ψ_i, 可将 $l_h[u]$, $r_{hi}[u]$ 按 Taylor 展开式展开为 h 的級数就可以得到。

例 1 §1 例 1 的 (ii) 中, $u=x^4$. 因而

$$l_h[u]=[(x+h)^4-2x^4+(x-h)^4]/h^2=12x^2+2h^2,$$

所以若 $\varkappa=2$ 則 $h^{-\varkappa}(l[u]-l_h[u])=-2$, 即 $\psi=-2$. 又因为边界条件的近似是准确的, 所以 $\psi_i=0$. w 是 $L[w]\equiv w''=-2$, $w(0)=w(1)=0$ 的解, 所以 $w=x(1-x)$.

注意 2 在定理 1 的条件下, 已經指出了 (39.1) 的 w 的存在性, 很明显, w 也是不依賴于 h 的。这个事实在实际应用上象下面那样来利用。首先对于 $h=h_1$ 时解近似边界值問題, 得到解 $u_{h_1}\equiv u_1$. 其次将格子加細, 設 $h=h_2$, 解方程得 $u_{h_2}\equiv u_2$. 令 $h_1=ch_2\,(c>1)$, 再假設 $G_{h_1}\subset G_{h_2}$, 利用定理 1 的結果, 可得

$$u_1=u+h_1^{\varkappa}w+o(h_1^{\varkappa}), \quad u_2=u+h_2^{\varkappa}w+o(h_2^{\varkappa}). \tag{39.4}$$

从这两个式子中消去 w, 則

$$u=u_2+\frac{u_2-u_1}{c^{\varkappa}-1}+o(h_2^{\varkappa}).$$

因此得到了具有誤差为 $o(h_2^{\varkappa})$ 的近似式

$$u \approx u_2 + \frac{u_2 - u_1}{c^{\varkappa} - 1}. \tag{39.5}$$

如果 $w \neq 0$，用 u_2 作为 u 的近似，它的誤差是 $O(h_2^{\varkappa})$，因为 (39.5) 的誤差是 $o(h_2^{\varkappa})$，所以从誤差的漸近形式，可以說 (39.5) 是好的近似值。如果 $w=0$，$u \approx u_2$ 和(39.5)的誤差都是 $o(h_2^{\varkappa})$，根据誤差的漸近形式，不能断定它們的优劣。

§40 討論收斂性，誤差的例子

1) 現在只就 §26, §36 所处理的 Schrödinger 型边界值問題，通过例子說明一下如何将 §38, §39 中关于收斂性証明，誤差估計等的結果，应用在具体問題上的方法。

考慮区間 (0, 1) 上的边界值問題

$$L[u] \equiv u'' - qu = f \quad (0 < x < 1), \tag{40.1}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{40.2}$$

其中 q, f 是給定的函数，

$$q \geqq 0. \tag{40.3}$$

对于上面問題的近似边界值問題，如果以 $x_n = nh\ (h = 1/N,\ 0 \leqq n \leqq N)$ 为格子点，象我們已知那样，可为

$$\left.\begin{aligned} l_h[u_h] = h^{-2}[u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}] - q_n u_n = f_n, \\ u_0 = u_N = 0 \text{ 但 } u_n = u_h(x_n). \end{aligned}\right\} \tag{40.4}$$

考慮从 (40.4) 中消去 u_0, u_N，那末 l_h 是表示将 $N-1$ 个元的向量 $\{u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}\}$ 对应 $N-1$ 个元的向量 $\{f_1, \cdots, f_{N-1}\}$ 的变换 T_h. 再考慮在 $\{x_n;\ 1 \leqq n \leqq N-1\}$ 上定义的所有函数构成的向量空間 E_h，于是 F_h 成为 E_h，至于 U_h，在将 $\{0, u_1, \cdots, u_{N-1}, 0\}$ 和 $\{u_1, \cdots, u_{N-1}\}$ 看作是一样的情况下，仍然是 E_h. 在 E_h 中(从而在 U_h, F_h 中)，用

$$\|u_h\|_h^2 = h \sum_{n=1}^{N-1} u_n^2, \qquad \|f\|_h^2 = h \sum_{n=1}^{N-1} f_n^2 \tag{40.5}$$

定义 $\| \ \|_h$，E_h 的内积 $(\ ,\ )_h$ 按照 $\| \ \|_h$ 来規定。U 作为滿足(40.2)的充分光滑的任意函数集合，使 $F=\{L[u];u\in U\}$. 按照(40.5)，使 U, F 中的范数是

$$\|u\|_U^2=\int_0^1 u^2dx, \quad \|f\|_F^2=\int_0^1 f^2dx. \tag{40.6}$$

很容易知道，对于 (40.5)，(40.6)，§28 的条件是成立的。再有，因为边界条件的近似是准确的，所以如果能指出 (40.4) 关于方程是穩定的，由 §38 定理 1 系，就能够保証它的收斂性。这个証明要从研究 E_h 中对称变换 T_h 的性质开始。現在設 A_h 是用 §26 例 2 定义的矩陣，則 $T_h=A_h-Q_h$，(40.4) 可以写为下面的形式：

$$T_hu_h\equiv A_hu_h-Q_hu_h=f. \tag{40.7}$$

因此，若指出 T_h^{-1} 关于 h 是有界的，从

$$\|u_h\|_h\leqq\|T_h^{-1}\|_h\cdot\|f\|_h$$

可以得到所希望的結果。

設 v 是 E_h 的任意元素，由 $q_n\geqq0$ 得

$$(T_hv,\ v)_h=(A_hv,\ v)_h-(Q_hv,\ v)_h\leqq(A_hv,\ v)_h.$$

A_h 的固有值，根据 (26.16) 可知都是負的，設其中最大(絕对值最小)的是 $\rho_1(h)$，則

$$\rho_1(h)=-2(1-\cos\pi h)/h^2, \tag{40.8}$$

且 $(A_hv,\ v)_h\leqq\rho_1(h)(v,\ v)_h$. 一方面取小于 1 的正数 h_0，那末，在 $0<h<h_0$ 中，(40.8) 的右边是 h 的增函数，所以 $\rho_1(h)\leqq\rho_1(h_0)$.

因而令 $c_0=-\rho_1(h_0)$，則 $c_0>0$ 及

$$(T_hv,\ v)_h\leqq-c_0(v,\ v)_h\leqq0. \tag{40.9}$$

很容易知道，(40.9)的意义是❶

$$\|T_h^{-1}\|_h\leqq c_0^{-1}. \tag{40.10}$$

最后，当 $0<h<h_0$ 时，得到了

❶ 参考本丛书吉田耕著《泛函分析》定理 1.5，1.6.

$$\|u_h\|_h \leqq c_0^{-1}\|f\|_h. \tag{40.11}$$

于是，根据 § 38 定理 1 系，u_h 是在

$$h\sum_{n=1}^{N-1}[u(x_n)-u_h(x_n)]^2 \to 0 \quad (h\to 0)$$

的意义下收斂。

若 $u\in U\subset C^4$，由(26.5)可知

$$\|L[u]-l_h[u]\|_h \leqq h^2M_4/12, \quad M_4=\max|u^{(4)}|,$$

所以由 § 38 定理 2，下面的不等式是成立的：

$$\|u-u_h\|_h \leqq h^2c_0^{-1}M_4/12. \tag{40.12}$$

估計式 (40.12)，当 c_0 愈大，准确度愈高，例如当 $h_0=1/2$ 时，$c_0=2\cdot 2^2(1-0)=8$，因而

$$\|u-u_h\|_h \leqq h^2M_4/96. \tag{40.13}$$

2) 现在研究 1) 中所处理的問題，在采用了另外范数后的情形。作为預备知識，先証明下面的引理。

引理 1 关于任意的 u_h，若 $l_h[u_h]\leqq 0$，$u_h(0)=u_h(1)=0$，則 $u_h(x_n)\geqq 0$ $(0\leqq n\leqq N)$. 但(40.3)是假設条件。

証明 将 $u_h(x_n)$ 写为 $u_h(x_n)=u_n$，若 $u_n=$常数，則 $u_n\equiv 0$，所以命題是成立的。若 u_n 不是常数，可用归謬法証明。u_n 为負时，存在着負的最小值 $M(M<0)$. 再由于 u_n 不是常数，所以存在滿足下面式子的 n：

"$u_n=M$, u_{n+1}, u_{n-1} 中至少有一个 $>M$, $1\leqq n\leqq N-1$".

使

$$l_h[u_h]_n=h^{-2}[u_{n+1}-2M+u_{n-1}]-q_nM>h^{-2}[M-2M+M]-q_nM$$
$$=-q_nM\geqq 0,$$

这就得到了 $l_h[u_h]_n>0$，和假設是矛盾的。 (証毕)

引理 2 若 $l_h[v_h]\leqq -|l_h[u_h]|$，$v_0=v_N=u_0=u_N=0$，則 $v_n\geqq|u_n|$ $(0\leqq n\leqq N)$，但 $u_n=u_h(x_n)$，$v_n=v_h(x_n)$. 同样 (40.3) 是假設的条件。

証明 由假設知 $l_h[v_h]\leqq -l_h[u_h]$，且 $l_h[v_h]\leqq l_h[u_h]$。因而 $l_h[v_h+u_h]\leqq 0$，$l_h[v_h-u_h]\leqq 0$。所以若将引理 1 应用在每个 v_h+u_h，v_h-u_h 上，可知 $v_h+u_h\geqq 0$，且 $v_h-u_h\geqq 0$ 在所有格子点上都成立。由此可直接得出引理的結論。

現在再重新考察一下 (40.4)。U, F, U_h, F_h 和 1) 中所取的完全相同，但范数定义为

$$\|u\|_U=\max_x|u(x)|,\quad \|f\|_F=\max_x|f(x)|,$$

$$\|u\|_{U_h}=\max_n|u(x_n)|\quad \|f\|_{F_h}=\max_n|f(x_n)|.$$

如果 U, F 是由充分光滑的函数組成的，則滿足 §28 的假設。現在令

$$\rho_h(x)=\|f\|_{F_h}(1-x)x/2,\tag{40.14}$$

則 $\rho_h(x)\in U$，$\rho_h(x)\geqq 0$ $(0\leqq x\leqq 1)$，而且对于 2 次函数，2 阶差分商和 2 阶微商是一样的。所以 $l_h[\rho_h]=-\|f\|_{F_h}-q_n\rho_h\leqq -\|f\|_{F_h}\leqq -|l_h[u_h]|$。因而由引理 2 得 $|u_h|\leqq\rho_h$。两边取最大值，則

$$\|u_h\|_{U_h}\leqq\frac{1}{8}\|f\|_{F_h}.\tag{40.15}$$

由 (40.15)，再根据 §38 定理 1 系，得

$$\max_n|u(x_n)-u_h(x_n)|\to 0\quad (h\to 0),$$

这就指出了 $u_h\to u$。再有令 $u\in C^4$，由 (40.15)，§38 定理 2 和

$$\|L[u]-l_h[u]\|_{F_h}\leqq h^2M_4/12,\quad M_4=\max|u^{(4)}|,$$

可得

$$\|u-u_h\|_{U_h}\leqq h^2M_4/96,\tag{40.16}$$

在形式上和(40.13)是相同的。

問題 試說明从(40.16)可以导出(40.13)。

另外，如果将 U, U_h 的范数定义为

$$\|u\|_U=\max_x\frac{2|u(x)|}{x(1-x)},\quad \|u_h\|_{U_h}=\max_n\frac{2|u_h(x_n)|}{x_n(1-x_n)}.$$

由 $|u_h|\leqq\rho_h$ 可得到 $\|u_h\|_{U_h}\leqq\|f\|_{F_h}$. 由这个不等式，可推导出下面的估計式：

$$\|u-u_h\|_{U_h}\leqq h^2M_4/12. \tag{40.17}$$

根据 $\|\ \|_{U_h}$ 的定义，(40.17)說明了有比(40.16)更准确的估計式：

$$|u(x)-u_h(x)|\leqq h^2x(1-x)M_4/24. \tag{40.18}$$

3) 在偏微分方程的边界值問題中，一般地格子区域 G_h 的边界 Γ_h 不在原来的边界 Γ 上。因而对于第一种边界条件，近似边界条件的近似一般也是不准确的。所以証明收斂性时，仅根据方程的稳定性是不充分的，同时也必需指出边界条件的稳定性。下面以Poisson方程的边界值問題作为例子，来說明这个問題。即考虑

$$\left.\begin{aligned}L[u]&\equiv\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=f,\\ \gamma[u]&\equiv u|_\Gamma=\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{40.19}$$

但假設 Γ 所圍成的区域是有界的，也就是存在一个正数 a，使区域包含在圓 $x^2+y^2\leqq a^2$ 中。現在取 $x=mh,\ y=nh$ 确定的正方形格子，参照 §30，§35 的結果，則上面边界值問題的近似边界值問題是

$$l_h[u_h]\equiv h^{-2}\Diamond_h u_h=f, \tag{40.20}$$

$$\gamma_h[u_h]\equiv u_h|_{\Gamma_h}=\varphi_h,\quad \varphi_h=[\varphi]_h, \tag{40.21}$$

其中 $\Diamond_h$ 是用(30.1)定义的，将定义在 G_h 的格子点函数移到定义在 G_h 的內部 G_h^i 上的函数的差分算子。即 §28 中的 G_h^0 变为現在的 G_h^i. $[\ ]_h$ 是用 §35 的(ii)定义的。为了說明(40.20)，(40.21)当范数取絕对值的最大值时是适定的，和 2) 的情形一样，作为准备知識，提出下面引理。

引理 3　对于定义在 G_h 上的任意 u_h，如果在 G_h^0 上 $l_h[u_h]\leqq 0$，在 Γ_h 上 $u_h\geqq 0$，則在 G_h 上 $u_h\geqq 0$.

它的証明方法和証明引理 2 一样。除了 u_h 在 G_h 上是常数外，在 G_h^0 上 u_h 不能取負的最小值。这也就說明了不能取負值。

引理 4 对于定义在 G_h 上的任意 u_h, v_h, 如果在 G_h^0 上 $l_h[v_h] \leqq -|l_h[u_h]|$, 在 Γ_h 上 $v_h \geqq |u_h|$, 則在 G_h 上 $v_h \geqq |u_h|$.

从引理 3 导出引理 4 的方法, 和从引理 1 导出引理 2 的方法完全一样。

注 上面引理所述的事实和满足 $\Delta u \leqq 0 (\Delta u \geqq 0)$ 的优 (劣) 調和函数 $u(x, y)$ 的所謂"最小(大)值原理"是相对应的。另外, 在实际上有时将满足 $l_h[u_h] \leqq 0 (l_h[u_h] \geqq 0)$ 的格子点函数 u_h 称为**优(劣)調和格子点函数**。

現在, 設 U 是定义在 $G+\Gamma$ 上的充分光滑的任意函数, $F, \Phi, U_h, F_h, \Phi_h$ 是滿足 §28, §33 的条件的函数族。例如 U_h 是由定义在 G_h 上的所有格子点函数 u_h 构成的。用函数值絕对值的最大值定义这些函数族中的范数。为了利用引理 4, 引入下面的函数:

$$\rho_h(x, y) = \|\varphi_h\|_{\Phi_h} + \frac{1}{4}\|f\|_{F_h}(a^2 - x^2 - y^2). \tag{40.22}$$

ρ_h 具有下面的性质。首先由于 $\Gamma_h \subset G_h \subset G+\Gamma$, Γ_h 含于圓 $x^2+y^2 \leqq a^2$ 內, 所以

$$\rho_h|_{\Gamma_h} \geqq \|\varphi_h\|_{\Phi_h} \geqq |\varphi_h| = |u_h||_{\Gamma_h}. \tag{40.23}$$

对于二次函数 $a^2-x^2-y^2$, $h^{-2}\Diamond_h$ 和 Δ 是相同的, 所以

$$l_h[\rho_h] = -\|f\|_{F_h} \leqq -|l_h[u_h]|. \tag{40.24}$$

因而, 引理 4 的 v_h, u_h 可以分别取 ρ_h, (40.20), (40.21) 的解 u_h. 結果是

$$|u_h| \leqq \rho_h \leqq \|\varphi_h\|_{\Phi_h} + \frac{a^2}{4}\|f\|_{F_h}. \tag{40.25}$$

若左边取最大值, 可导出表达适定的不等式

$$\|u_h\|_{U_h} \leqq \|\varphi_h\|_{\Phi_h} + a^2\|f\|_{F_h}/4. \tag{40.26}$$

因而 $\max\limits_{G_h}|u-u_h| \to 0 (h \to 0)$, 即指出了 $u_h \to u$.

另外, 对于常数 M_1, M_4, 如果令

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqq M_1, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqq M_1, \quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right| \leqq M_4, \quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right| \leqq M_4,$$

則由 (30.3) 和 $[\ ]_h$ 的定义, 得

$$\|L[u]-l_h[u]\|_{\Gamma_h}\leqq h^2M_4/6,\quad \|[\gamma[u]]_h-r_h[u]\|_{\Phi_h}\leqq hM_1.$$

故根据 § 38 定理 2 和 (40.26)，得誤差估計式

$$|u-u_h|\leqq\|u-u_h\|_{U_h}\leqq hM_1+\frac{h^2}{24}a^2M_4. \tag{40.27}$$

若象 2) 后半部分那样，将范数予以若干变更，則可导出

$$|u-u_h|\leqq hM_1+\frac{h^2}{24}M_4(a^2-x^2-y^2).$$

其証明讀者可自行练习。

4) 关于二阶非常系数椭圆型微分方程的边界問題，在本质上可以用和 1), 3) 一样的論証方法，証明它的收斂性。例如对于 § 36, 3) 中考察的問題

$$L[u]\equiv A\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+C\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}-qu=f,$$

$$u|_\Gamma=\varphi,$$

如果用 (36.19) 定义的 l_h，使其近似边界值問題为 $l_h[u_h]=f$, $u_h|_{\Gamma_h}=[\varphi]_h$，則在下面的条件 (i)～(ii) 下是适定的，从而也指出了 $u_h\to u$。

(i) $A>0$, $C>0$, $q\geqq0$.

(ii) 存在着使 $A+C\geqq M_0$, $|D|\leqq M_1A$, $|E|\leqq M_2C$ 的正常数 M_0, M_1, M_2.

实际上，当 h 充分小时，对于上面的 l_h，可証明引理 4 (参考 § 36 引理)。

关于更高阶的微分方程問題，例如 $\Delta^2u=f$, $u|_\Gamma=\varphi_1$, $\frac{\partial u}{\partial n}=\varphi_2$ 等，如果使用 § 30, § 35 所說的近似方程，近似边界条件，可以証明近似边界值問題是适定的，近似解 u_h 收斂于 u。

再有，关于椭圓型偏微分方程問題，一般不限定只用正方形格子。即或使用长方形格子，当所有格子間隔趋近于 0 时，近似解也

收斂于所求的解。例如看一下 3) 的問題，引理 3, 4 不用 l_h，而用 (h, k 是 x, y 方向的格子間隔)

$$l_{h,k}[u]=\frac{u_{m+1,n}-2u_{m,n}+u_{m-1,n}}{h^2}+\frac{u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1}}{k^2}$$

定义的 $l_{h,k}$，仍然可以推得出是成立的。

5) (40.12), (40.18), (40.27) 等給出的誤差 $u-u_h$ 估計式，包含着解 u 的高阶导數的上界。誤差的估計式只有在极特殊的情况下，才能得出不含有未知量的形式。例如 Wasow 所研究的在长方形区域上的 Dirichlet 問題，就是这种情形的一个例子。这个問題归結为边界值在长方形的一边以外都是零，并且若使近似方程为 $h^{-2}\diamondsuit_h u_h=0$，微分方程的解 u 和近似解 u_h，同时可以解析的用相似的級數形式 (无限項，有限項) 得出。然后比較級數的系數。特别当正方形的边长是 A 时，結果为

$$|u-u_h|\leq h^2(1.4Q_2+0.43AQ_3),$$

在这里，Q_2 是边界值 φ 的四个頂点上的 2 阶导數絕对值的上界，Q_3 是 φ 的 3 阶导數絕对值在整个边界上的上界。但 φ 的导數是由定点沿着边界測得的距离求导的。

§41 固有值問題

1) 在 §26 例 2, §32 例子中所看到的那样，差分法的近似解法也适用于固有值問題。为了簡单起見，在微分方程的固有值問題

$$L[u]=\lambda u,\quad \gamma_i[u]=0\quad (i=1, 2, \cdots, s) \tag{41.1}$$

中，L, γ_i 是綫性的，固有值是

$$\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\leqq\lambda_k\leqq\cdots. \tag{41.2}$$

当 l_h 是 L 的近似差分算子，$r_{hi}[u_h]=0$ 是 $\gamma_i[u]=0$ 的近似条件时，若解差分方程的固有值問題

$$l_h[u_h]=\rho u_h, \tag{41.3}$$

$$r_{hi}[u_h]=0\quad (i=1, 2, \cdots, s) \tag{41.4}$$

得出固有值 $\rho_1\leqq\rho_2\leqq\cdots$，則可以把 ρ_k 看作是 λ_k 的近似值。但是如

果 G 有界时，固有值的个数是有限的。象 § 28 所說的那样，(41.3) 是在 G_h^0 上成立的关系式，利用 (41.4)，从 (41.3) 左边中，将 G_h^0 以外的点上的 u_h 消去，以 G_h^0 各点的 u_h 值为元素的向量 $X=\{u_h(P), P\in G_h^0\}$，构成向量空間 E_h，那末，(41.3)，(41.4) 就成为 E_h 上的綫性变换（矩陣）T_h 的固有値問題了。可写为下面的形式：

$$T_h X=\rho X. \tag{41.5}$$

例如 § 26 例 2 的 A_h，对于 l_h 就是上面所說的 T_h. 因而固有值 ρ_k 的个数（考虑重复度），只是屬于 G_h^0 上点的个数（G 有界）。

大多数情况下，例如 L，当 $\varDelta$，$l_h=h^{-2}\diamondsuit_h$ 时，若 $h\to 0$，可知 $\rho_k\to\lambda_k$. 但从实际应用的目的来看，上面收斂的速度一般是緩慢的。仅当边界的形式复杂，不适于用 Ritz 方法的情况下，固有值問題才使用差分法。

例 1　設 L 为 $\varDelta$，G，Γ 分别是正方形 $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ 的內部和边界，用 $x=mh$，$y=nh$ $(h=1/N,\ 0\leqq m,\ n\leqq N)$ 确定格子，如果边界条件为 $u|_\Gamma=0$，則近似固有值問題是

$$h^{-2}\diamondsuit_h u_h\equiv h^{-2}(u_{m+1,n}+u_{m-1,n}+u_{m,n+1}+u_{m,n-1}-4u_{m,n})=\rho u_{m,n},$$

但

$$1\leqq m,\ n\leqq N-1,\quad u_{m,n}=u_h(mh,\ nh) \tag{41.6}$$

及

$$u_{0,n}=u_{N,n}=0,\quad u_{m,0}=u_{m,N}=0. \tag{41.7}$$

这个問題和微分方程时一样，可用变量分离来解。即令 $u_{m,n}=v(m)\cdot w(n)$，則关于每个 v，w，归結为 § 26 例 2 的問題，其結果是

$$\left.\begin{aligned}&\rho_{k,l}=\rho_k+\rho_l\quad(1\leqq k,\ l\leqq N-1),\\ \text{但}\quad&\rho_n=h^{-2}(\cos n\pi h-1)\quad(1\leqq n\leqq N-1).\end{aligned}\right\} \tag{41.8}$$

另外，$\rho_{k,l}$ 对应的格子点上的固有函数 $u_h^{(k,l)}=C\cdot\sin k\pi x\cdot\sin l\pi y$.

2) 即使 (41.3) 的 l_h 在形式上是对称的，也就是当 $P,\ Q\in G_h^0$，$l_h[u_h]$ 在 P 处的式子中，关于 $u_h(Q)$ 的系数和 $l_h[u_h]$ 在 Q 处的式子中，关于 $u_h(P)$ 的系数相等，但带有边界条件 (41.4)，(41.5) 的

T_h 也可能不是对称的。若用

$$\|X\|^2=\sum_{G_h} u_h^2 \tag{41.9}$$

定义 E_h 上的范数，內积也相应的确定，如果 T_h 是对称的，则固有值問題 (41.5) 归結为 $(T_hX, X)/\|X\|^2$ 的变分問題。

例 2 $L[u]\equiv -u''(x)=\lambda u,\ u'(0)=u'(1)=0.$

取格子 $x_n=nh\,(h=1/N,\ 0\leq n\leq 1)$，$L[u]$ 的近似差分算子取 $l_h[u_h]=-h^{-2}\delta^{(2)}u_h$. 也就是若用記法 $u_h(x_n)=u_n$，在 x_n 上有 $l_h[u_n]=(-u_{n+1}+2u_n-u_{n-1})$. 如果近似边界条件取

$$(u_1-u_0)/h=0,\quad (u_N-u_{N-1})/h=0, \tag{41.10}$$

则 $u_0=u_1,\ u_N=u_{N-1}$. 用这个結果从表示 $l_h[u_h]$ 的式子中消去 $u_0,\ u_N$，则得

$$l_h[u_h]_1=(u_1-u_2)/h^2,\quad l_h[u_h]_{N-1}=(-u_{N-2}+u_{N-1})/h^2.$$

所以对于 $X=\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_{N-1}\}$，象(41.5)意义下的变换 T_h，可用下面的矩陣表示：

$$h^{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

若根据 §34，取

$$(-3u_0+4u_1-u_2)/2h=0$$

作为 $u'(0)=0$ 的近似，用此消去 u_0，则

$$l_h[u_h]_1=2(u_1-u_2)/3h^2.$$

表示 T_h 的矩陣为

$$h^{-2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

注 現在就 L 是 Δ 的情況，研究利用上述变分原理和微分方程变分原理之間的关系，作出能給出 L 的固有値上下界的差分方程固有値問題的构成方法。为了簡单起見，取 $L[u]=-u''=\lambda u$ 作为例子加以介紹。但区域，格子等

和例2相同，边界条件取 $u(0)=u(1)=0$．只考察最小的固有值 λ_1．那末对于滿足边界条件的 $u\neq 0$，有

$$\frac{-\int_0^1 u''u\,dx}{\int_0^1 u^2 dx}=\frac{\int_0^1 u'^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx}\geqq\lambda_1. \tag{41.11}$$

現在設 $u_n(u_0=u_N=0)$ 在格子点 x_n 上已經給出。然后作出在 $0\leqq x\leqq 1$ 上定义的函数 $\bar{u}(x)$，使得在 $x_n\leqq x\leqq x_{n+1}$ 上

$$\bar{u}(x)=u_n+(x-x_n)(u_{n+1}-u_n)/h\quad(n=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1),$$

即 $\bar{u}(x)$ 是連結 $(x_n,\ u_n)$ 的折綫图象。通过簡单的計算，可知

$$\int_0^1[\bar{u}']^2 dx=h\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(u_{n+1}-u_n)^2}{h^2},\quad \int_0^1\bar{u}^2 dx=\frac{h}{3}\sum_{n=0}^{N-1}\{2u_n^2+u_nu_{n+1}\},$$

用 $\bar{u}$ 代替 (41.11) 中的 u，则

$$\frac{\sum_{n=0}^{N-1}(u_{n+1}-u_n)^2/h^2}{3^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}(2u_n^2+u_n\cdot u_{n+1})}\geqq\lambda_1. \tag{41.12}$$

于是确定 $u_n(1\leqq n\leqq N-1)$，使左边为最小的問題，归結为

$$\frac{-u_{n+1}+2u_n-u_{n-1}}{h^2}=\rho\,\frac{u_{n+1}+4u_n+u_{n-1}}{6}\quad(1\leqq n\leqq N-1),\ u_0=u_N=0.$$

这和直到現在所处理的問題是不同种类的問題。但也是一种差分方程的固有值問題。固有值 ρ 中的最小值如果取为 ρ_1，则 $\rho_1\geqq\lambda_1$．即对于任意的 h，ρ_1 給出了 λ_1 的上界。关于多元的 $\Delta u=\lambda u$，在本质上也可以用同样的方法来处理。

§42 数 值 解 法

对于某个确定的 h，解近似边界值問題

$$l_h[u_h]=f,\quad r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$$

是代数的問題。这可以应用解方程組的各种方法解出。特别是在綫性时，用消去法，逐次代入法最为便利。下面簡单說明这些方法的要領。

1) **消去法**　計算中間将某些个格子点上的 u_h 值作为参数，各点上的 u_h 用这些参数来表示，最后再决定这些参数的值。

例 1 $l_h[u_h]\equiv h^{-2}\delta^{(2)}u_n-q_nu_n=f_n\quad(1\leqq n\leqq N-1)$,

$$u_0=a,\quad u_N=b,$$

但 $u_n=u_h(nh)$, $\delta^{(2)}u_n=u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}$. 由 $l_h[u_h]=f_n$, 若用 u_n, u_{n-1} 表示 u_{n+1}, 则为

$$u_{n+1}=2u_n-u_{n-1}+h^2(q_nu_n+f_n). \tag{42.1}$$

现在令 $u_1=\alpha$, 反复使用 (42.1), 则 u_n 可用 α 表示。例如

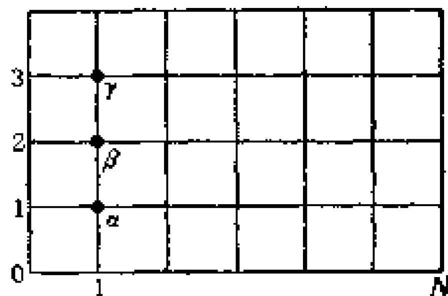
$$u_2=2\alpha-a+h^2(q_1\alpha+f_1),$$

最后結果的形式是

$$u_n=A_n+B_n\alpha\quad(0\leqq n\leqq N), \tag{42.2}$$

其中 A_n, B_n 是依赖于 a, h, q_n, f_n 而与 α 无关的量。为了决定 α, 利用 $u_N=b$, 由 $b=A_N+B_N\alpha$ 即可求出。

在数值上可按下面来进行。設 $\alpha=0$, $\alpha=1$, 若按上面程序进行, 在数值上可求得 $u_n^{(0)}=A_n$, $u_n^{(1)}=A_n+B_n$. 如果用 $c_0+c_1=1$, $c_0u_N^{(0)}+c_1u_N^{(1)}=b$ 确定常数 c_0, c_1, 则 $u_n=c_0u_n^{(0)}+c_1u_n^{(1)}$ 就是所求的解。根据重迭原理, 易知能这样作的理由。



例 2 就右面图形的格子,解

$$h^{-2}\Diamond_h u_h=f$$

也是一样的。但边界的格子上的 u_h 值已經給出。

由 $h^{-2}\Diamond_h u_h=f$, $u_{m+1,n}$ 可用它左边格子点上的值表示。(令 $u_h(mh, nh)=u_{m,n}$)

$$u_{m+1,n}=4u_{m,n}-u_{m,n+1}-u_{m,n-1}-u_{m-1,n}+h^2f_{m,n}, \tag{42.3}$$

于是令 $u_{1,1}=\alpha$, $u_{1,2}=\beta$, $u_{1,3}=\gamma$, 则用边界值和 α, β, γ, 可以从左边順次作出 $u_{m,n}$ 的值。其結果的形式是

$$u_{m,n}=A_{m,n}\alpha+B_{m,n}\beta+C_{m,n}\gamma+D_{m,n}, \tag{42.4}$$

$A_{m,n}$, …, $D_{m,n}$ 是可以求出数值的常数。α, β, γ 的值可以通过右端边界上, 使

$$u_{N,n}=\text{边界值}$$

而得出的关于 α, β, γ 的方程組求出。当 $\alpha=1$, $\beta=\gamma=0$; $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=0$; $\alpha=\beta=0$, $\gamma=1$; $\alpha=\beta=\gamma=0$, 按上面程序可得四个解 $u_{m,n}^{(A)}$, $u_{m,n}^{(B)}$, $u_{m,n}^{(C)}$, $u_{m,n}^{(D)}$. 再将它們按和为 1 的系数迭合,并利用边界条件, 容易定出 $u_{m,n}$. 可以参考上面的例子。

2) 逐次代入法 (iteration)　将所給的差分方程看作是一次方程組，可以应用 § 17 所說的逐次代入法来解。例如从满足边界条件的适当的 $u_h^{(0)}$ 出发，根据

$$u_h^{(m)}=u_h^{(m-1)}+\tau(l_h[u_h^{(m-1)}]-f)\quad(\tau\text{ 是常数}),\qquad(42.5)$$

$$r_{hi}[u_h^{(m)}]=\varphi_{hi}\quad(i=1,\ \cdots,\ s),\qquad(42.6)$$

可依次确定 $u_h^{(m)}$. 若用 (42.5) 能够确定出 G_h^0 上的 $u_h^{(m)}$，則在 $G_h-G_h^0$ 上的 $u_h^{(m)}$ 可通过解(42.6)求出。上面形式的逐次代入法，要对于任意的 $u_h^{(0)}$, f, $u_h^{(m)}\to u_h$ 的充分必要条件是：对于所給的 h，方程

$$l_h[u_h]=\rho u_h,\quad r_{hi}[u_h]=0\quad(i=1,\ \cdots,\ s)$$

所决定的任意一个固有值 ρ 都有 $|1+\tau\rho|<1$. 另外可知这时 $\max|1+\tau\rho|$ 愈小，收斂愈快。例如按照 §41 例 1 的区域和格子解

$$h^{-2}\Diamond_h u_h=f,\quad u_h|_\Gamma=\varphi_h,$$

由

$$\rho=\rho_{k,l}=-\frac{4}{h^2}\left(\sin^2\frac{k\pi}{2}h+\sin^2\frac{l\pi}{2}h\right)\quad(1\leqq k,\ l\leqq N-1),$$

得

$$-\frac{8}{h^2}<-\frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi}{2}h\leqq\rho\leqq-\frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2}h<0.$$

所以，若 $0<\tau\leqq h^2/4$ 时收斂。将 $u_h^{(m)}(ih,\ jh)$ 写为 $u_{i,j}^{(m)}$，取 $\tau=h^2/4$，則(42.5)的形状，如我們所知是

$$u_{i,j}^{(m)}=\frac{1}{4}(u_{i+1,j}^{(m-1)}+u_{i-1,j}^{(m-1)}+u_{i,j+1}^{(m-1)}+u_{i,j-1}^{(m-1)})-\frac{h^2}{4}f_{i,j}.$$

仅从研究收斂性的角度来說，$u_h^{(0)}$ 可以是任意的，但是为了能够很快得出好的結果，一般都是从粗的格子所解出的近似値，用插値法来构成。

(42.5)形式的逐次代入，对于普通的近似边界値問題，收斂是緩慢的。关于收斂較快的逐次代入的形式，有各种各样的研究，在此不另作說明❶。

❶ 可参看 Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, Физматгиз, 1960. 一书中的第二部分(有中譯本)。 —— 校者注

第6章　初始值問題的差分法近似解法

本章是論述差分法在抛物型，双曲型微分方程的初始值問題上的应用。若将初始条件解釋为是以时間 t 为一个自变量的区域边界上的边界条件，那末前章所导出的近似差分方程，近似边界条件、适定性，稳定性等基本概念，以及收斂性定理等在此照旧通用。因此关于这些事項，不另作說明。我們只在具体例子中认为有必要时才加以复习。但是和椭圆型显著差异的是适定性，稳定性受到格子性质的影响，譬如与格子間隔的比有本质的关系。对于极其基本的初始值問題，本章将就这个情况作比較詳細的叙述，但是对关于时間具有高阶导数的微分方程，以及微分方程組的初始值問題，不預备作深入的討論。

§43 預 备，規 定

1) 以下为了簡单起見，空間坐标只取 x，用 t 表示时間。再有以 t, x 为变数的函数写作 $u(t, x)$. 函数記号中的两个变数，第一个定为 t. 又如对于 $u(0, x)=\varphi_1$, $u_t(0, x)=\varphi_2$ 的所謂初始条件，应用前章的結果时，可以认为是边界条件的一种。然而依照习惯，今后称为初始条件，以便和边界条件 $u(t, 0)=\varphi_3$ 区別。对于对应的近似边界条件，也作同样的規定。即称"近似初始条件""对差分方程的初始条件"。

2) 格子总是采用 $t=m\tau$, $x=nh$（m, n 为整数）。不限定 $\tau=h$. 再有格子点 $(m\tau, nh)$ 上 u_h 的值写作 $u_{m,n}$. 对于 G_h, F_h 等的定义与前章相同，但 G_h 的点子中，$t=m\tau$ 的格子的全体集合用 S_m 表示，S_m 的点称为**第 m 段格子点**。

§44 近似初始值問題的例子

設 G 是 $t>0$, $0<x<1$ 的区域，Γ 是其边界，取 $h=1/N$，于是

$\Gamma_h \subset \Gamma$.

1) 考虑

$$L[u] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \qquad (44.1)$$

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \ u(t, 0) = \varphi_2(t), \ u(t, 1) = \varphi_3(t). \qquad (44.2)$$

近似初始条件,近似边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &u_{0,n} = \varphi_1(nh) \qquad (0 \leqq n \leqq N), \\ &u_{m,0} = \varphi_2(m\tau), \ u_{m,N} = \varphi_3(m\tau) \quad (0 \leqq m), \end{aligned}\right\} \qquad (44.3)$$

这些近似是准确的。近似(44.1)的方程有多种。

(i) $l_h[u_h] = f$, 但

$$l_h[u_h] \equiv (u_{m+1,n} - u_{m,n})/\tau - (u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1})/h^2 \quad (44.4)$$

(参看下图)

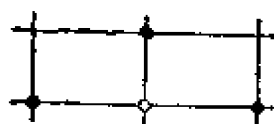


图 44.1

若 u 充分光滑,当 $\sigma = \tau/h^2$ 时,则

$$L[u] - l_h[u] = h^2\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + h^4\left(\frac{1}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \frac{\sigma}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right) + o(h^4).$$

由此当 $h \to 0$, σ 一定时,则知近似度为 2. 又若 $f \equiv 0$, u 取作满足 $L[u] = 0$ 的充分光滑的函数,则对于 $\sigma = \frac{1}{6}$, 可得 $L[u] - l_h[u] = O(h^4)$, 这是由于从 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 可导出 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ 的缘故。对此 σ,按 § 31 的意义可知,关于 l_h 在满足微分方程的函数类上的近似度为 4.

由 $l_h[u_h] = f$, 则 S_m 上的 u_h, 可直接用 S_{m-1} 上的 u_h 表示。即

$$u_{m+1,n} = \sigma u_{m,n+1} + (1 - 2\sigma) u_{m,n} + \sigma u_{m,n-1} + \tau f_{m,n}. \qquad (44.5)$$

由于 $u_{0,n}$ 是作为初始条件給出的，于是从边界条件及(44.5)可以顺次找出 $S_1, S_2, \cdots$ 上的 u_h 的值。这样可知 (44.3), (44.4) 的解对于任意的 $\varphi_i (i=1, 2, 3)$, f 是唯一存在的。一般地，若从 $l_h[u_h]=f$ 能将 S_m 上的 u_h 用下面各段 $S_{m-1}, S_{m-2}, \cdots, S_{m-q}$ 上的 u_h 表示时，則其差分方程称为显(explicit)的，否則称为隐(implicit)的。解显的差分方程是极容易的。

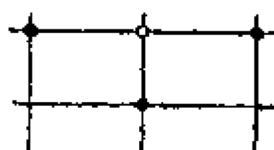


图 44.2

(ii) $l_h[u_h]=f$, 但

$$l_h[u_h] \equiv (u_{m,n}-u_{m-1,n})/\tau-(u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1})/h^2. \qquad (44.6)$$

(参看图 44.2) 令 $\sigma=\tau/h^2$, 若当 $h\to 0$ 时 σ 一定，則近似度为 2. 因(44.6) 是隐的方程，若能求出 S_{m-1} 上的 u_h 时，則 S_m 上的 u_h, 可以通过解关于 u 的差分方程

$$(u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1})/h^2-u_{m,n}/\tau=-f_{m,n}-u_{m-1,n}/\tau$$

求出。但 $u_{m,0}=\varphi_2(m\tau)$, $u_{m,N}=\varphi_3(m\tau)$ 看作是边界条件。然后由 § 36 的 2) 可知 $u_{m,n}$ 唯一地确定。这是因为那里的 q, f 相当于 $1/\tau>0$, $-f_{m,n}-u_{m-1,n}/\tau$.

(iii) $l_h[u_h]=f$, 但 $\delta_h^{(2)}$ 只作用于 n,

$$l_h[u_h] \equiv (u_{m+1,n}-u_{m,n})/\tau-(\delta^{(2)}u_{m+1,n}+\delta^{(2)}u_{m,n})/2h^2. \qquad (44.7)$$

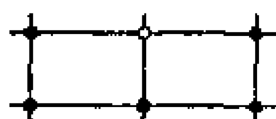


图 44.3

这和(ii)同是隐的方程，解仍然是唯一存在，其理由与(ii)时相同。

(iv) $l_h[u_h]=f$, 但

$$l_h[u_h] \equiv (u_{m+1,n}-u_{m-1,n})/2\tau-(u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1})/h^2, \qquad (44.8)$$

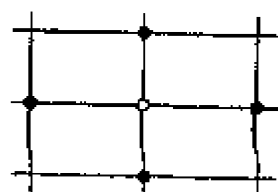


图 44.4

(44.8)是显的方程的一种，但是为了求 S_m 上的值，必須知道 S_{m-1}, S_{m-2} 两段上的值。初始值仅給出了 S_0 上的值，所以 S_1 上的值先由 (i)～(iii) 的任何一个方法求出，然后用

(44.8)求以后各段的值。

2)
$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f,\tag{44.9}$$
$$u(0,\ x)=\varphi_1(x),\quad \partial u(0,\ x)/\partial t=\varphi_2(x),\tag{44.10}$$
$$u(t,\ 0)=\varphi_3(t),\quad u(t,\ 1)=\varphi_4(t).\tag{44.11}$$

(44.9)的近似方程取

$$(u_{m+1,n}-2u_{m,n}+u_{m-1,n})/\tau^2-(u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1})/h^2=f_{m,n}.\tag{44.12}$$

令 $r=\tau/h$，当 $h\to 0$ 时若 r 一定，则上式的近似度为 2. 由(44.12)，$u_{m+1,n}$ 可用 S_m，S_{m-1} 上的 u_h 表示。即(44.12)为显的方程。

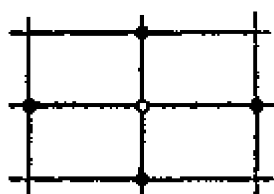


图　44.5

初始条件用 $u_{0,n}=\varphi_1(nh)$，$(u_{1,n}-u_{0,n})/\tau=\varphi_2$ 近似，由于 $u_{1,n}=\varphi_1(nh)+\tau\varphi_2(nh)$，所以由初始条件可定出 S_0，S_1 上的值。然后根据(44.12)和边界条件

$$u_{m,0}=\varphi_3(m\tau),\qquad u_{m,N}=\varphi_4(m\tau),$$

順次的可以求出 S_2，S_3，…上的值。

注 1　在不是有界的区域上所定义的函数称为充分光滑时，包含着函数本身及它的各阶导数有界。

注 2　上面的范数取的是函数值的絕对值的最大值，今后关于范数如果沒有特別說明，都是指这样的解釋。

§45　分析收斂性的例子

对于初始值問題，形式上同一的近似差分方程，近似初始条件，由于格子間隔 h，τ 之間的 h，$\tau\to 0$ 的相互关系，可以使差分方程有时具有适定性及稳定性，而有时不是那样。因此，为了保証它的收斂，h，τ 之間必須給与适当的条件。有关这方面的一般研究，留在以后进行。在此仅就波动方程为例，說明如下。

将半平面 $t\geqq 0$, $-\infty<x<+\infty$ 的初始值問題

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f, \tag{45.1}$$

$$\gamma_1[u]\equiv u(0, x)=\varphi_1(x),\ \gamma_2[u]\equiv u_t(0, x)=\varphi_2(x), \tag{45.2}$$

用下面差分方程近似：

$$l_h[u_h]\equiv(u_{m+1,n}-2u_{m,n}+u_{m-1,n})/\tau^2-(u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1})/h^2=f_{m,n};\ 但\ u_{m,n}=u_h(m\tau, nh), \tag{45.3}$$

及

$$r_{h1}[u_h]\equiv u_{0,n}=\varphi_1(nh),\ r_{h2}[u_h]\equiv(u_{1,n}-u_{0,n})/\tau=\varphi_2(nh). \tag{45.4}$$

令 $r=\tau/h$, 当 $h\to 0$ 时, r 为一定。若(45.1), (45.2)的解 u 包含 x 軸而充分光滑，可以知道在任意点上使 $u_h\to u$ 的充要条件是 $r\leqq 1$. 这个事实这里不作証明。可是根据下面的考察，可以理解若 $r>1$ 时，上面的收斂性是不能得到的。至于 $r=1$ 的情形后面立刻加以証明。由(45.4),

$$u_{0,n}=\varphi_1(nh),\ \ u_{1,n}=\varphi_1(nh)+\tau\varphi_2(nh), \tag{45.5}$$

所以能定出 S_0, S_1 上的 u_h 值。若就 $u_{m+1,n}$ 解(45.3),則象已知的那样, S_m 上的 u_h 值，可随着 S_{m-1}, S_{m-2} 上的 u_h 的确定而定出。通过进一步的討論,可以知道下面的事实。令 P 为任意格子点,通过 P 作斜率分别为 r, $-r$ 的两直綫,并設直綫与 x 軸的交点分别为 A_r, B_r. 再令含于三角形 A_rPB_r 內的 S_m 的点的全体为 $S_m^{(P)}$. 若給出 $S_{m-1}^{(P)}$, $S_{m-2}^{(P)}$ 上的 u_h 值，則 $S_m^{(P)}$ 上的 u_h 值即可确定。結果是 $S_0^{(P)}$, $S_1^{(P)}$ 上的值确定后，即可确定出 P 上的值（在这个意义上将

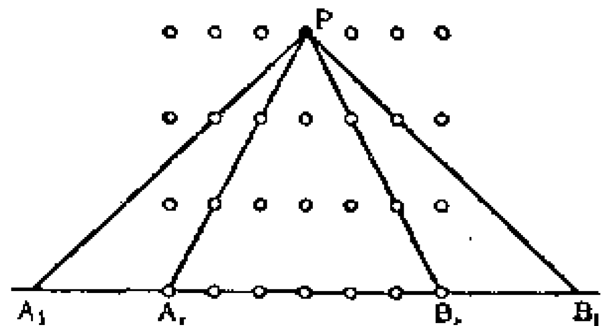


图 45.1

$S_0^{(P)} \cup S_1^{(P)}$ 称为 P 关于(45.3)的**依存域**)。由于 $S_0^{(P)}$, $S_1^{(P)}$ 上的值由(45.5)給出，以下若将 f 看作是固定的，则 P 上的 u_h 的值仅依賴于 A_rB_r 上的 φ_1, φ_2. 又因 r 一定时 h 趋于0，可知 $u^*(P) = \lim_{h\to 0} u_h(P)$❶也只依賴于 A_rB_r 上的 φ_1, φ_2. 然而由波动方程依存域的理論，容易知道 $u(P)$ 依賴于 A_1B_1 上的 φ_1, φ_2. 于是，若 $r>1$, A_rB_r 上的 φ_1, φ_2 的值不变，而将 $(A_1B_1 - A_rB_r)$ 上的 φ_1, φ_2 改变时，一般能使解 $u(P)$ 改变，而 $u^*(P)$ 保持不变。可知 $u(P) = u^*(P)$ 一般是不成立的。

其次，具体研究一下 $r=1$ 的情形。設 T 为任意的正数，区域規定为 $0 \leqq t \leqq T$，現在証明一下在其中的格子区域 G_h 上，(45.3)，(45.4)是适定的。但范数除 $\| \ \|_{\Phi_{h1}}$ 以外都取函数值的絕对值的最大值。取

$$\|\varphi_1\|_{\Phi_{h1}} = \max_n |\varphi_1(nh)| + \max_n \left| \frac{\varphi_1((n+1)h) - \varphi_1(nh)}{h} \right|,$$

与此对应，若取

$$\|\varphi_1(x)\|_{\Phi_1} = \max_x |\varphi_1(x)| + \max_x |\varphi_1'(x)|,$$

如果 $\varphi_1 \in \Phi_1$ 与 φ_1' 皆为有界連續，則在§33的意义下，$r_{h1}[u_h] = \varphi_1$ 是 $\gamma_1[u] = \varphi_1$ 的近似边界条件(参照§28 問題)。

当 $r=1$ 时，由(45.3)得到

$$u_{m+1,n} + u_{m-1,n} - u_{m,n+1} - u_{m,n-1} = h^2 f_{m,n}. \qquad (45.6)$$

首先注意 t 軸上的格子点 $P(a, 0)$，另外設 $a=(2N+1)h$，在(45.6)的两端，就滿足 $m+n=$ 偶数，$1 \leqq m \leqq 2N$，

$$-2N + m \leqq n \leqq 2N - m \qquad (45.7)$$

的 m, n 相加，(45.7)的意义是使点 (mh, nh) 成为图45.2上附有"∘"的点的条件。于是左边的和中仅剩下 u_P 与 $S_0^{(P)}$, $S_1^{(P)}$ 上的 u_h(参考图可知)，即

❶ $u_h(P)$ 的极限可能不存在，但这不妨碍下面的論証。——校者注

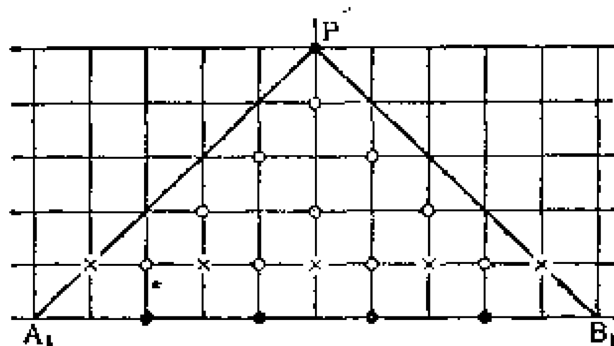


图 45.2

$$u_P+\sum_n{}' u_{0,n}-\sum_n{}'' u_{1,n}=h^2\sum_{m,n}{}^{\Delta} f_{m,n}. \tag{45.8}$$

但右边的和就是(45.7)全范圍作和，$\sum_n{}'$ 表示从 $-2N+1$ 到 $2N-1$ 的奇数和，$\sum_n{}''$ 表示从 $-2N$ 到 $2N$ 的偶数和。从(45.8)及 $u_{A_1}+\sum_n{}' u_{0,n}=\sum_n{}'' u_{0,n-1}$，得出

$$u_P=\varphi_1(A_1)+\sum_n{}''\{\varphi_1(nh)-\varphi_1((n-1)h)\}$$
$$+h\sum_n{}''\varphi_2(nh)+h^2\sum_{m,n}{}^{\Delta} f_{m,n}.$$

在此若令 $|\varphi_1|<\delta_1$，$|[\varphi_1((n+1)h)-\varphi_1(nh)]/h|<\delta_1'$，$|\varphi_2|<\delta_2$，$|f_{m,n}|<\delta$，用

$$\sum_n{}'' h=(2N+1)h=a,\quad \sum_{m,n}{}^{\Delta} h^2<\triangle A_1PB_1=a^2,$$

得到

$$|u_P|<\delta_1+a\delta_1'+a\delta_2+a^2\delta,$$

对于一般的格子点 (t, x)，同样也可知下式成立：

$$|u_h(t, x)|<\delta_1+t\delta_1'+t\delta_2+t^2\delta. \tag{45.9}$$

由不等式(45.9)，立刻可导出关于上述范数是适定的結論。因此若 u 包含 x 軸且充分光滑，則有

$$\max|u(t, x)-u_h(t, x)|\to 0\quad (h\to 0)$$

(但 max 取在 $-\infty<x<\infty$, $0\leqq t\leqq T$ 范圍内)．由于 T 是任意的，所以任意点上的 u_h 收斂于 u.

最后，若 $r=2/\sqrt{3}>1$，可証明(45.3)，(45.4)关于初始条件是不穩定的(范数和以上同)。若令

$$u_h \equiv u_{m,n} = (-1)^{m+n}3^m\tau, \tag{45.10}$$

当 $\varphi_{h1}(nh)=(-1)^n\tau$, $\varphi_{h2}(nh)=-4(-1)^n$ 时，可立刻知道

$$r_{h1}[u_h]=\varphi_{h1},\ r_{h2}[u_h]=\varphi_{h2}.$$

又因 $|\varphi_{h1}|=\tau$, $|(\varphi_{h1}(nh+h)-\varphi_{h1}(nh))/h|=2\tau$, $|\varphi_{h2}|=4$, 所以 h, $\tau\to0$ 时，（关于上述的范数）φ_{h1}, φ_{h2} 一致有界。另一方面，将 u_h 直接代入(45.3)，立刻知道 u_h 满足 $l_h[u_h]=0$. 现在注意一下格子点 (t, x)，但 $t>0$, τ 取使 t/τ 为整数而趋于0的值，从(45.10)得

$$|u_h(t, x)|=3^{t/\tau}\tau\to\infty\quad(\tau\to0),$$

可知(45.3), (45.4)关于初始条件是不稳定的。

§46 用指数分析稳定性及其他

1) 虽然已經提到过差分方程的初始值問題，初始条件的意义，这里再明确一下。为了簡单起見，設所考虑的格子区域 G_h 是含于 $0\leqq t\leqq T$（或者 $0\leqq t$），$a\leqq x\leqq b$ 内的格子点集合。

由差分方程

$$l_h[u_h]=f \tag{46.1}$$

和与前章意义相同的边界条件

$$r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi}\quad(1\leqq i\leqq s) \tag{46.2}$$

所构成的問題，以(46.2)中的若干个，例如

$$r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi}\quad(1\leqq i\leqq p,\ p\leqq s) \tag{46.3}$$

为初始条件的所謂**初始值問題**，是指下面的(i), (ii)条件成立：

(i) 由(46.3)能唯一确定最初的 p 段 S_0, S_1, $\cdots$, S_{p-1} 上的 u_h 的值。

(ii) 对于任意的 $m\geqq p$, 若給出 S_{m-1}, S_{m-2}, $\cdots$, S_{m-p} 上的 u_h 的值，由(46.1)和(46.2)中不属于(46.3)的，即

$$r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi}\quad(p+1\leqq i\leqq s) \tag{46.4}$$

可唯一地确定 S_m 上的 u_h 的值。

注意 1 今后所說的边界条件，如果沒有特別說明，是指满足(46.4)的条件。

注意 2 近似微分方程初始值問題的差分方程問題，一般地具备以上的性质(i)，(ii)，不过唯一性的条件有时不必明显給出。

2) 满足上面(i)，(ii)时，若 l_h, $r_{hi}(p+1\leqq i\leqq s)$是綫性，用給出的 S_{m-1}, $\cdots$, S_{m-p} 上的 u_h，决定 S_m 上的 u_h 的問題，可以归結为解以 S_m 上的 u_h 为未知数的一次方程組的問題。因而特别地，若是 $f=0$, $\varphi_{hi}=0$ $(p+1\leqq i\leqq s)$，即方程和边界条件是齐次时，则 $u_{m,n}$ 可以用 S_{m-1}, S_{m-2}, $\cdots$, S_{m-p} 上的 u_h 的綫性組合表示。若这个綫性組合的系数絕对值之和为 $M_{m,n}$，则 G_h 中 $M_{m,n}$ 的最大值称为初始值問題(46.1)，(46.3)，(46.4)的**指数**(index)。在 $p=1$ 时，指数和关于初始条件的稳定性之間，成立下面命題。

定理 初始条件 $r_{h1}[u_h]\equiv u_{0,n}=\varphi_{h1}$ 的綫性初始值問題的指数 J，若在 $0<\tau<\tau_0$ 时，满足

$$J\leqq 1+C\tau \quad (C\geqq 0,\ \text{常数}), \tag{46.5}$$

则其初始值問題关于初始条件是稳定的。但区域关于 t 是有界的，u_h, φ_{h1} 的范数是采取函数值的絕对值的最大值。

証明 齐次方程，边界条件，初始条件 $r_{h1}[u_h]=\varphi_{h1}$ 的解 u_h，在 S_m 上的最大值写作 $\|u_h\|^{(m)}$，则由指数的定义和(46.5)

$$\|u_h\|^{(0)}=\|\varphi_{h1}\|_{\Phi_{h1}},$$

$$\|u_h\|^{(m)}\leqq(1+C\tau)\|u_h\|^{(m-1)} \quad (m=1,\ 2,\ \cdots),$$

从而

$$\|u_h\|^{(m)}\leqq(1+C\tau)^m\|\varphi_{h1}\|_{\Phi_{h1}}. \tag{46.6}$$

所考虑的区域，若含在 $0\leqq t\leqq T$ ($T>0$, 常数)的范圍內，于是 $0\leqq m\tau\leqq T$，因而 $(1+C\tau)^m\leqq e^{CT}$，結果得到了下面的不等式和得出了关于初始条件的稳定性。

$$\|u_h\|_{U_h} \leqq e^{CT} \|\varphi_{h1}\|_{\Phi_{h1}}.$$ (証毕)

系 若 $J \leqq 1$，可以去掉定理中的条件"区域对于 t 有界"。

注意 3 定理的条件是关于初始条件为稳定的充分条件。即或是 $J \geqq m > 1$（m 为常数），有时也是稳定的。

注意 4 求 J 时，不能忽略边界条件(46.4)的影响。

例 1 設 G 是由 $0<t<T$, $0<x<1$ 所确定的区域，$h=1/N$. 考虑分别近似微分方程 $u_t=u_{xx}$，初始条件 $u(0, x)=\varphi(x)$，边界条件 $u(t, 0)=u(t, 1)=0$ 的近似式子

$$(u_{m+1,n}-u_{m,n})/\tau=(u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1})/h^2, \tag{46.7}$$

$$u_{0,n}=\varphi(nh), \quad u_{m,0}=u_{m,N}=0. \tag{46.8}$$

但(46.7)中 $0\leqq m$, $1\leqq n\leqq N-1$, (46.8)中 $0\leqq n\leqq N$, $0\leqq m$. 令 $\sigma=\tau/h^2$，由(46.7)，对于 $1\leqq n\leqq N-1$ 有

$$u_{m+1,n}=\sigma u_{m,n+1}+(1-2\sigma)u_{m,n}+\sigma u_{m,n-1}. \tag{46.9}$$

由(46.9)和(46.8)的边界条件，若 $0<\sigma\leqq\frac{1}{2}$，則得 $J=1$.

例 2 代替(46.7)考虑 $u_t=u_{xx}+a(t, x)u$ 的近似式

$$(u_{m+1,n}-u_{m,n})/\tau=(u_{m,n+1}-\cdots)/h^2+a_{m,n}u_{m,n}.$$

但 $a_{m,n}=a(m\tau, nh)$. 另外，与(46.8)相同。若存在使 $|a(t, x)|\leqq C$ 的常数 C，这时也是当 $0<\sigma\leqq 1/2$ 时 $J\leqq 1+C\tau$，定理可以适用。

例 3 在例1的(46.7)，(46.8)中，只将边界条件 $u_{m,0}=0$ 换成近似于 $u_x(t, 0)+au(t, 0)=0$（a 为常数）的近似式子

$$(u_{m,1}-u_{m,0})/h+au_{m,0}=0, \tag{46.10}$$

而保持 $u_{m+1,N}=0$. 这时(46.9)不变。另一方面，由(46.10)有

$$u_{m+1,0}=u_{m+1,1}/(1-ah). \tag{46.11}$$

若将右边的 $u_{m+1,1}$ 写成(46.9)的形式，則用 S_m 上的 $u_{m,n}$ 表示 $u_{m+1,n}$ $(0\leqq n\leqq N)$ 的式子变为一致的了。結果若 $0<\sigma\leqq\frac{1}{2}$，則得

$$J=\max\{1, 1/(1-ah)\}.$$

若 $a\leqq 0$ 則 $J=1$. 于是可应用定理。若 $a>0$，則

$$J=1/(1-ah)=1+a\sqrt{\tau}/\sqrt{\sigma}+O(\tau).$$

当 $\tau\to 0$ 时，如果 σ 保持常数，則使(46.5)成立的 C 是不存在的。但实际上，这时用其他方法也可証明稳定性。

§ 47 用变数分离法分析稳定性

1) 現仅就有代表性的例題加以叙述,但它們亦是对一般問題都可适用的判定法,并且同时提出可以利用的各种补助公式。

在 $0\leqq t\leqq T$, $0\leqq x\leqq 1$ 的范圍内考慮。令 $h=1/N$, 研究下面差分方程的初始值問題(参看(44.4))关于初始条件的稳定性。

$$(u_{m+1,n}-u_{m,n})/\tau=(u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1})/h^2, \quad (47.1)$$

$$u_{0,n}=\varphi_h(nh), \quad u_{m,0}=u_{m,N}=0. \quad (47.2)$$

現在設 E 是定义在 $x_n(0\leqq n\leqq N)$ 上的在 x_0, x_N 处为零的函数全体作成的向量空間, $v\in E$ 的范数用(47.3)給出

$$\|v\|_E^2=h\sum_{n=1}^{N-1}v^2(x_n). \quad (47.3)$$

与(47.3)相对应的内积写作$(\ ,\ )_E$, 其意义是显然的。于是导入

$$\varphi^{(k)}(x_n)=\sqrt{2}\sin k\pi x_n \quad (k=1, \cdots, N-1) \quad (47.4)$$

后,根据 § 26 例 2, 則

$$\left.\begin{aligned} &h^{-2}\delta_h^{(2)}\varphi^{(k)}=\rho_k\varphi^{(k)},\\ &\rho_k=\frac{2}{h^2}(\cos k\pi h-1)=-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi}{2}\end{aligned}\right\} \quad (47.5)$$

成立。又关于$(\ ,\ )_E$, 很容易驗証 $\{\varphi^{(k)}, 1\leqq k\leqq N-1\}$是完全正規正交系。

注 根据 § 26, 例 2 的討論,正交性是显然的。

因而,用 $c_k=(\varphi_h, \varphi^{(k)})_E(1\leqq k\leqq N-1)$, φ_h 可展开为

$$\varphi_h=\sum_{k=1}^{N-1}c_k\varphi^{(k)}, \qquad \|\varphi_h\|_E^2=\sum_{k=1}^{N-1}c_k^2. \quad (47.6)$$

注 $\varphi_h\in E$, 即 $\varphi_h(0)=\varphi_h(1)=0$ 是使 (47.2) 不矛盾的必要假設。这种假設有时称为初始条件、边界条件的**相容性** (compatibility)。

其次,决定仅是 t (仅是 m)的函数 $w^{(k)}$, 使得 $w^{(k)}\cdot\varphi^{(k)}$ 满足齐次方程(47.1). 实际上, 将上面形式的函数代入(47.1), 考虑

(47.5)，則 $w^{(k)}$ 滿足的方程是

$$w_{m+1}^{(k)}-w_m^{(k)}=\tau\rho_k w_m^{(k)};\quad w_m^{(k)}=w^{(k)}(m\tau). \tag{47.7}$$

(47.7)的解中，使

$$w_0^{(k)}=1 \tag{47.8}$$

的解写为 $w^{(k)}$，則初始値問題的解 $u_h(u_{m,n}=u_h(m\tau,\ nh))$ 可由

$$u_h=\sum_{k=1}^{N-1}c_k w^{(k)}\cdot\varphi^{(k)} \tag{47.9}$$

給出。其中 c_k 和(47.6)的相同。若只限于 S_m 上的 u_h 为 $u_h^{(m)}$，則可看作 $u_h^{(m)}\in E$. 由(47.9)

$$\|u_h^{(m)}\|_E^2=\sum_{k=1}^{N-1}c_k^2(w_m^{(k)})^2\leqq[\max_k|w_m^{(k)}|]^2\|\varphi_h\|_E^2.$$

因而，若把 u_h 的范数定义为

$$\|u_h\|_{U_h}=\max_{m,\,0\leqq m\tau\leqq T}\|u_h^{(m)}\|_E, \tag{47.10}$$

則当 $0<h<h_0$, $0<\tau<\tau_0$ 时，使得

$$\|u_h\|_{U_h}\leqq C\cdot\|\varphi_h\|_E \tag{47.11}$$

成立而不依賴于 $h,\ \tau$ 的常数 C 的存在条件是 $w^{(k)}$ 有界。(47.11)是表示在上述范数的意义下，关于初始条件穩定性的不等式。結果，只討論(47.7)的解 $w^{(k)}$ 就可以了。另一方面，应用一次方程 $\lambda-1=\tau\rho_k$ 的根，$w^{(k)}$ 可由

$$w^{(k)}(m\tau)=\lambda^m,\qquad \lambda=1+\tau\rho_k \tag{47.12}$$

給出[1]。

因而，如将 ρ_k 用 ρ 表示，若

$$\max|1+\tau\rho|\leqq1, \tag{47.13}$$

則(47.11)成立，且可取 $C=1$. (47.13)的 max 是就 $h,\ \tau,\ k$ 取的，并且(47.13)可改写为

---

[1] 見本丛书穆湧基譯《差分方程》一书，或其他有关綫性常系数差分方程解法的书。——校者注

$$-2 \leqq \rho\tau \leqq 0. \tag{47.14}$$

另一方面，若令

$$\sigma = \tau/h^2, \tag{47.15}$$

由(47.5)，则 $-h^{-2}4<\rho<0$，所以得出

$$-4\sigma<\rho\tau<0. \tag{47.16}$$

由(47.16)导出(47.14)的条件是

$$0<\sigma \leqq 1/2. \tag{47.17}$$

結果若(47.17)成立，可知关于初始条件是稳定的。

为了說明上面的方法，对于不是显的方程同样有效，下面举出一个例子（参考(44.6)）。

代替(47.1)，取

$$(u_{m,n}-u_{m-1,n})/\tau = (u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1})/h^2, \tag{47.18}$$

初始条件，边界条件及其他不变，这时若将解表成(47.9)的形式，则 $w^{(k)}$ 可用

$$w_m^{(k)}-w_{m-1}^{(k)} = \tau\rho_k w_m^{(k)},\ w_0^{(k)}=1 \tag{47.19}$$

决定。令 $w_m^{(k)}=\lambda^m$，则 λ 由

$$1-\frac{1}{\lambda}=\tau\rho_k \text{ 得 } \lambda=\frac{1}{1-\tau\rho_k}. \tag{47.20}$$

因 $\tau\rho_k<0$，所以总是 $|\lambda|<1$. 于是(47.11)当 $C=1$ 时恒成立。在 τ, h 之間不另加条件，对于初始条件也是稳定的。同样近似于微分方程的差分方程中，常常可以見到不是显的方程比显的方程"稳定性好"的现象。

2) 为了指明对高阶(关于时間)时也适用，考虑格子和 1) 相同，近似 $u_{tt}=u_{xx}$ 的近似式为

$$\begin{aligned}(u_{m+1,n}-2u_{m,n}+u_{m-1,n})/\tau^2 \\ = (u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1})/h^2.\end{aligned} \tag{47.21}$$

設边界条件和 1) 相同，初始条件是

$$u_{0,n}=\varphi_{h1}(nh),\quad (u_{1,n}-u_{0,n})/\tau = \varphi_{h2}(nh),\tag{47.22}$$

再用(47.5)的 $\varphi^{(k)}$，展开成

$$\varphi_{h1}=\sum_{k=1}^{N-1}c_k'\varphi^{(k)},\quad \varphi_{h2}=\sum_{k=1}^{N-1}c_k''\varphi^{(k)}\tag{47.23}$$

的形式。另外求出 $w^{(k)}\cdot\varphi^{(k)}$ 满足(47.21)的条件，则有

$$w_{m+1}^{(k)}-2w_m^{(k)}+w_{m-1}^{(k)}=\tau^2\rho_k w_m^{(k)}.\tag{47.24}$$

于是在(47.24)的解中

$w_0^{(k)}=1,\quad (w_1^{(k)}-w_0^{(k)})/\tau=0$ 的解用 $w'^{(k)}$ 表示，

$w_0^{(k)}=0,\quad (w_1^{(k)}-w_0^{(k)})/\tau=1$ 的解用 $w''^{(k)}$ 表示，

則初始值問題的解 u_h 用(47.23)的 c_k', c_k'' 可写为

$$u_h=\sum_{k=1}^{N-1}\{c_k'w'^{(k)}\varphi^{(k)}+c_k''w''^{(k)}\varphi^{(k)}\}.\tag{47.25}$$

此时，若将 $\|\ \ \|_{U_h}$ 用(47.10)定义，当 $0<h<h_0$, $0<\tau<\tau_0$ 时，使得

$$\|u_h\|_{U_h}^2\leqq C\cdot(\|\varphi_{h1}\|_E^2+\|\varphi_{h2}\|_E^2)\tag{47.26}$$

成立而不依賴于 h, τ 的常数 C 的存在条件，也是 $w'^{(k)}$, $w''^{(k)}$ 有界（关于 h, τ, k 是一样的）。

注　由(47.26)可得 $\|u_h\|_{U_h}\leqq 2\sqrt{C}(\|\varphi_{h1}\|_E+\|\varphi_{h2}\|_E)$.

現在說明一下，若令 $r=\tau/h$，当 $h\to 0$ 时假設 r 为一定，且 $r<1$，可得出上述的稳定性。将 $\rho^{(k)}$, $w'^{(k)}$, $w''^{(k)}$ 一般写成 ρ, w' w''，若二次方程

$$\lambda^2-2\lambda+1=\tau^2\rho\lambda\tag{47.27}$$

有相异的两根 λ_1, λ_2 时，w', w'' 可由

$$w'=\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^m+\frac{1-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_2^m,\quad w''=\frac{\tau}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1^m-\lambda_2^m)\tag{47.28}$$

給出❶。若(47.27)的判別式为 D，則

$$D=\tau^2\rho(4+\tau^2\rho).$$

另一方面，由(47.5)得 $-4/h^2<\rho<0$，即 $-4r^2<\rho\tau^2<0$，因而考慮

---

❶ 見 152 頁的脚注。——校者注

$r<1$，则

$$4+\tau^2\rho>4(1-r^2)>0.$$

結果 $D<0$；λ_1，λ_2 是互为共轭的虚根。又由 $\lambda_1\lambda_2=1$ 得

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=1. \tag{47.29}$$

另外設 h_0 是比 1 小的正数，若令

$$c_0=-\rho_1(h_0)=2(1-\cos\pi h_0)/h_0^2, \tag{47.30}$$

则象在 §40,1) 所看到的那样，$0<h<h_0$ 时 $-4/h^2<\rho<-c_0$，由此可导出

$$|\lambda_1-\lambda_2|^2=|D|=|\rho\tau^2(4+\rho\tau^2)|>4c_0\tau^2(1-r^2),$$

$$|1-\lambda_1|^2=|1-\lambda_2|^2=|(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)|=|\rho\tau^2|.$$

若将(47.28)的估計，改变为簡单的形式，由不等式

$$\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2|}<\frac{1}{2\tau\sqrt{c_0(1-r^2)}},\quad \frac{|1-\lambda_1|}{|\lambda_1-\lambda_2|}=\frac{|1-\lambda_2|}{|\lambda_1-\lambda_2|}<\frac{1}{2\sqrt{1-r^2}},$$

和(47.29)一起，当 $0<h<h_0$ 时，可得出

$$|w'|<\frac{1}{\sqrt{1-r^2}},\qquad |w''|<\frac{1}{\sqrt{c_0(1-r^2)}}, \tag{47.31}$$

应用在(47.25)上，则

$$\|u_h^{(m)}\|_h^2\leqq\frac{1}{1-r^2}\|\varphi_{h1}\|_h^2+\frac{1}{c_0(1-r^2)}\|\varphi_{h2}\|_h^2, \tag{47.32}$$

由此可立刻得到 (47.26) 形式的不等式和关于初始条件的稳定性的結論。

注 在上面的意义上(就上面的范数)，可以証明当 $r=1$ 时，关于初始条件是不稳定的。希望和 §45 的結果比較一下。再有本节的結論，也通常用

$$\|u_h\|_{U_h}=\tau\sum_{m,\,0\leqq m\tau\leqq T}\|u_h^{(m)}\|_h$$

代替(47.10)。

§48 关于初始条件的稳定性和关于方程的稳定性

对于綫性差分方程的初始值問題，大多数是若能証明关于初

始条件的稳定性，由此結果，就可証明关于方程的稳定性，进而証明适定性。因此前节所处理的关于初始条件稳定性的判别法，对于分析收斂性也是有用的方法。下面通过簡单的例子說明。

在前节 2) 的初始値問題中，將方程换成非齐次的，初始条件换成齐次的，其他不变。即考虑

$$l_h[u_h] \equiv (u_{m+1,n}-2u_{m,n}+u_{m-1,n})/\tau^2-(u_{m,n+1}-2u_{m,n}$$
$$+u_{m,n-1})/h^2=f_{m,n}, \quad f_{m,n}=f(m\tau, nh), \tag{48.1}$$

$$u_{0,n}=0, \quad (u_{1,n}-u_{0,n})/\tau=0, \tag{48.2}$$

$$u_{m,0}=u_{m,N}=0. \tag{48.3}$$

將 $f=f(m\tau, nh)$ 的范数，用类似于(47.10)的方法定义是很自然的，然而为了簡单起見，定义为

$$\|f\|_{F_h}=\max_{m,n}|f_{m,n}|, \tag{48.4}$$

假設 $\|f\|_{F_h}<\delta$. 再把对于各个 k 在 S_k 上等于 f，此外都等于 0 的函数写作 $f^{(m)}$，設滿足

$$l_h[v]=f^{(k)}, \quad v_{0,n}=0, \quad (v_{1,n}-v_{0,n})/\tau=0,$$

$v_{m,0}=v_{m,N}=0$ 的解是 $v^{(k)}$，則

$$u_h=\sum_k v^{(k)}. \tag{48.5}$$

但上面的和是从 $k=1$ 加到滿足 $(k+1)\tau\leqq T$ 的 k. 然而从定义的方法，很明显"若 $m\leqq k$，則 $v^{(k)}_{m,n}=0$". 再有若將 $l_h[v]=f^{(k)}$ 在 S_k 上写出，則立刻知道，从 $v^{(k)}_{k,n}=0$, $v^{(k)}_{k-1,n}=0$ 得 $v^{(k)}_{k+1,n}=\tau^2 f_{k,n}$. 若注意在 S_{k+1}, S_{k+2}, … 上 $f^{(k)}=0$，則 $v^{(k)}$ 是滿足在 $t=k\tau$ 上給出的初始条件

$$v^{(k)}_{k,n}=0, \ (v^{(k)}_{k+1,n}-v^{(k)}_{k,n})/\tau=\tau f_{k,n}$$

的齐次方程、齐次边界条件的解。因而令 $r=\tau/h$，当 $h\to 0$ 时，假設 r 为一定，并且 $r<1$，則可以將(47.32)看作是 $\varphi_{h1}=0$, $\varphi_{h2}=\tau f^{(k)}=\tau f_{k,n}$ 来应用。由于 $|f|<\delta$，所以 $\|f^{(k)}\|^2_h<\delta^2$. (注意 $v^{(k)}$ 中的

(k) 和 $u_h^{(m)}$ 的 (m) 是具有不同的意义)結果是

$$\|v^{(k)}\|_{U_h}<\frac{\tau\delta}{\sqrt{c_0(1-r^2)}}=C_1\tau\delta, \tag{48.6}$$

其中 $\|\ \|_{U_h}$ 和(47.10)的定义一样。

結合(48.5)和(48.6)得到

$$\|u_h\|_{U_h}\leqq\sum_k\|v^{(k)}\|_{U_h}<C_1\delta\sum_k\tau<C_1\delta T. \tag{48.7}$$

这个式子指出了在有界区域上所考虑的差分方程的初始值問題，关于方程是稳定的。

§ 49 $t\to\infty$ 时的稳定性

設差分方程的初始值問題由

方程

$$l_h[u_h]=f, \tag{49.1}$$

初始条件： $r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi}(1\leqq i\leqq p)$, (49.2)

边界条件： $r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi}(p+1\leqq i\leqq s)$ (49.3)

构成。此时将 h (以及其他的格子間隔)看作是固定的，对于 $f=0$, $\varphi_{hi}=0\ (p+1\leqq i\leqq s)$ 的任意解，若当 $t\to\infty$ 时有界，則称上面的初始值問題，在 $t\to\infty$ 时(关于初始条件)是稳定的。即

定义 关于差分方程的初始值問題，使方程、边界条件为齐次时的解为 u_h 时，若存在着 M，使

$$|u_h(t,x)|\leqq M \qquad (t\to\infty), \tag{49.4}$$

則初始值問題，在 $t\to\infty$ 时是稳定的。或者称 $t\to\infty$ 时关于初始条件是稳定的。但 M 可以依赖于 τ, h.

这里讲的稳定性和前面所讲的关于初始条件的稳定性有非常密切的关系。多数情况下"就所有充分小的每个 h, $t\to\infty$ 时稳定"的条件和"就时間不是有界的区域上，关于初始条件稳定"的条件是一样的。可是在理論上两者有区别，而且在实际上可以作

出在一种意义下是稳定的，而在另一种意义下不是稳定的例子。另外 $t\to\infty$ 时的稳定性，适定性和收斂性沒有直接的联系。

$t\to\infty$ 时的稳定性，在应用上的意义解釋如下。"仅由初始值产生的任意有限誤差，給与解的影响，在无限区間上应保持有界"的条件，就是 $t\to\infty$ 时的稳定。但是这种与誤差增长有关联的解釋，对于前面所讲的稳定性也是可能的。特别是所給問題的范圍，就时間是有界时，这种解釋比 $t\to\infty$ 的稳定性更为合适。关于这方面的討論，因篇幅所限，在此省略。不过在这里附带提出一下这样的事实。即由于联系到差分法的近似解法而提出的稳定性問題，最初开始研究的，就是 $t\to\infty$ 时的稳定性。

关于 $t\to\infty$ 时的稳定性，也有用指数的判定法和用变数分离的判定法。关于这些，只要留意上面的定义，根据 § 46, § 47 的討論很容易推得。

第7章 摄 动 法

微分方程含有小参数 ε 时，将解写成 ε 的幂級数的近似解法称为**摄动法**。这种解法被广泛的利用着。一般地則希能得出一个收斂的級数来表示方程的眞正解，但这种企图并不是都能实現的。但是在不收斂时，有时取它的漸近級数常常会得到良好的效果。这一章主要研究收斂的情形。

§50 常微分方程的初始值問題

1) **基本定理** 設常微分方程組

$$\frac{du_i}{dt}=f_i(t,\ \boldsymbol{u},\ \varepsilon)\quad(i=1,\ \cdots,\ n)\tag{50.1}$$

的右边含小参数 ε. 把 n 个变数 $u_1,\ \cdots,\ u_n$ 的总体看成向量，并記为 $\boldsymbol{u}$. 現在假設 $f_i(t,\ \boldsymbol{u},\ \varepsilon)$ 作为 t 的函数是相当光滑的，作为 $u_1,\ \cdots,\ u_n,\ \varepsilon$ 的函数是正則的（解析的），并且在 $\varepsilon=0$ 的近傍可展成

$$f_i(t,\ \boldsymbol{u},\ \varepsilon)=f_i^{(0)}(t,\ \boldsymbol{u})+\varepsilon f_i^{(1)}(t,\ \boldsymbol{u})+\cdots\tag{50.2}$$

的 Taylor 級数。系数 $f_i^{(m)}(t,\ \boldsymbol{u})$ 为 $u_1,\ \cdots,\ u_n$ 的正則函数。也就是說，在 $u_1,\ \cdots,\ u_n$ 的各点的近傍可展成 n 重 Taylor 級数。ε 与 u_i 可取复数值，但为了簡单起見以下只取实数值。

这时，(50.1) 的解 u_i 也是正則的，并且可以展成如下的 ε 的 Taylor 級数：

$$u_i=u_i(t,\ \varepsilon)=u_i^{(0)}(t)+\varepsilon u_i^{(1)}(t)+\cdots.\tag{50.3}$$

由于(50.1)的解若不給予初始値是不能决定的。所以假定已知初始条件

$$t=a\ \text{时},\ u_i=b_i(\varepsilon)=b_i^{(0)}+\varepsilon b_i^{(1)}+\cdots,\tag{50.4}$$

此时在本丛书《常微分方程》（以下略記为《常》）中已經証明过（定

理 14) 关于(50.3)成立。但不难理解(50.3)只在 t 和 ε 的适当的領域内成立。在 $\varepsilon=0$ 的情形(称此为**非摄动方程** (unperturbed equation)),若在 t 的某区間 I_0 内存在解,先在 I_0 内决定一个較小的区間 I,即相当于取适当的正数 δ,若 $|\varepsilon|<\delta$,则在 I 里存在着满足(50.4)的(50.1)的解,并可表示为(50.3)的形状。一般若 I 相当大时,則必需取比較小的 δ.

2) **計算法** 求級数(50.3)的具体方法如下:将这个級数代入(50.1),把两边化为 ε 的冪級数的形状,比較系数即可。由 ε^0 的系数得

$$\frac{du_i^{(0)}}{dt}=f_i^{(0)}(t,\ \boldsymbol{u}^{(0)})\,. \tag{50.5}$$

这就是非摄动方程。将这个方程在初始条件

$$t=a\ \text{时},\quad u_i^{(0)}=b_i^{(0)}$$

下求解。其次,由 ε^1 的系数得

$$\frac{du_i^{(1)}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}f_{ik}^{(0)}(t,\ \boldsymbol{u}^{(0)})u_k^{(1)}+f_i^{(1)}(t,\ \boldsymbol{u}^{(0)})\,, \tag{50.6}$$

$f_{ik}^{(0)}$ 表示 $\partial f_i^{(0)}/\partial u_k$. 以上面求得的解作为 $\boldsymbol{u}^{(0)}$,代入右边,則此式成为关于 $\boldsymbol{u}^{(1)}$ 的綫性方程組,即**变分方程**(«常» § 20). 在初始条件 $u_i^{(1)}=b_i^{(1)}$ 下,解这个方程并决定 $\boldsymbol{u}^{(1)}$. 由 ε^2 的系数得出

$$\frac{du_i^{(2)}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}f_{ik}^{(0)}(t,\ \boldsymbol{u}^{(0)})u_k^{(2)}+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}f_{ikl}^{(0)}(t,\ \boldsymbol{u}^{(0)})u_k^{(1)}u_l^{(1)}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}f_{ik}^{(1)}(t,\ \boldsymbol{u}^{(0)})u_k^{(1)}+f_i^{(2)}(t,\ \boldsymbol{u}^{(0)})\,, \tag{50.7}$$

$f_{ikl}^{(0)}$ 表示 $\partial^2 f_i^{(0)}/\partial u_k\partial u_l$. 因右边的 $\boldsymbol{u}^{(0)}$, $\boldsymbol{u}^{(1)}$ 为已知的,所以此式为关于 $\boldsymbol{u}^{(2)}$ 的綫性方程,其主部(齐次項)与(50.6)的情形完全相同。在初始条件 $u_i^{(2)}=b_i^{(2)}$ 下解此方程。

用同样方法可作出关于各 $\boldsymbol{u}^{(m)}$ 的方程,除了 $\boldsymbol{u}^{(0)}$ 的情形外,它們都是具有相同主部的綫性方程。从而若求出齐次方程的一組

基本解，便可利用常数变易法(«常» § 38)得出解。

假若已知非摄动方程的一般解［含有 n 个任意常数 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$］$u_i(t, \boldsymbol{\alpha})$ 时，从它們便立即可求出基本解。即，若令

$$v_{ip}(t)=\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_p}u_i(t, \boldsymbol{\alpha})\right]_{\boldsymbol{\alpha}=\bar{\boldsymbol{\alpha}}}, \tag{50.8}$$

则 $v_{1p}, \cdots, v_{np}(p=1, \cdots, n)$ 便是所求的一組基本解 ($\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 表示相当于所考虑的解 $\boldsymbol{u}^{(0)}$ 的 $\boldsymbol{\alpha}$ 值)。为了驗証这一点，可将 $u_i(t, \boldsymbol{\alpha})$ 代入(50.5)，因为这个式子关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 是恒等的，故就 α_p 微分，令 $\boldsymbol{\alpha}=\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 便可。另外，v_{ip} 所作成的行列式不等于 0 的事实与 $\partial u_i/\partial\alpha_p$ 所作成的 Jacobi 行列式不等于 0 的事实（这包含于一般解的概念）是等价的。

3) **注意事項** 以上仅就一阶方程組作了叙述，关于含参数 ε 的高阶方程

$$\frac{d^nu}{dt^n}=f\left(t, u, \frac{du}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}, \varepsilon\right) \tag{50.9}$$

也有同样的結果。但要假設 f 关于 t 以外的参数是正则的。因为若設 $u=u_1$, $du/dt=u_2$, $\cdots$, $d^{n-1}u/dt^{n-1}=u_n$ 时，则 (50.9) 便归結为方程組(50.1)。但在实际計算时沒有必要把它改为方程組，把解直接写成 ε 的冪級数代入(50.9)，再逐次决定系数即可。結果仍然除了非摄动方程之外，其余的都是綫性方程。

上面所讲的是最朴素形式的摄动法，这种方法的难点在于当 t 的区間扩大时，ε 的允許范圍便縮小了。若允許对无限制的 t 展开为 Taylor 級数时，需要对方法本身加以适当的改进。詳細可参照常微分方程及非綫性振动的有关項目。

还需注意的一点是，对于象

$$F\left(t, u, \frac{du}{dt}, \cdots, \frac{d^nu}{dt^n}, \varepsilon\right)=0$$

的一般微分方程，其解 u 不一定能展成 ε 的冪級数。例如綫性

方程

$$f_0(t,\ \varepsilon)\frac{d^n u}{dt^n}+f_1(t,\ \varepsilon)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+\cdots+f_n(t,\ \varepsilon)u=g(t,\ \varepsilon),$$

若 $f_n(t,\ 0)$ 恒等于 0,或虽然不是这样,但在所考虑的 t 的区間中,有 $f_n(t,\ 0)$ 为 0 的点时,問題便很复杂。这种問題属于"奇异"摄动論,其中有一些将在第 8, 9 章里研究。

§51 边界值問題

1) **平面边界值問題** 作为摄动法在边界值問題应用的例子,考虑偏微分方程

$$-\Delta u+\varepsilon q(x,\ y)u=f(x,\ y), \tag{51.1}$$

其中 $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ 为 Laplace 算子。u 在平面的有界域 G 內必須滿足(51.1),并在 G 的边界 Γ 上应滿足边界条件

$$u=0. \tag{51.2}$$

令 ε 为小参数,今試将解求成

$$u=u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2 u^{(2)}+\cdots \tag{51.3}$$

的形状。

把(51.3)代入(51.1),比較 ε 的各次冪,則立即得到下列方程組:

$$\left.\begin{aligned}&-\Delta u^{(0)}=f,\\&-\Delta u^{(m)}=-qu^{(m-1)}\quad(m=1,\ 2,\ \cdots).\end{aligned}\right\} \tag{51.4}$$

作为这些方程的边界条件,要求对所有的 $u^{(m)}$ 都滿足条件(51.2).

若已知 Laplace 算子 Δ 和关于域 G 的 Green 函数 $K(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$ 时,(51.4)的解便容易由

$$\left.\begin{aligned}&u^{(0)}=Kf,\\&u^{(m)}=-Kqu^{(m-1)}\quad(m=1,\ 2,\ \cdots)\end{aligned}\right\} \tag{51.5}$$

得出。这里的 Kf 表示

$$Kf(x, y)=\int_G K(x, y; \xi, \eta)f(\xi, \eta)d\xi d\eta, \qquad (51.6)$$

K 是作用于函数 f 而得出函数 Kf 的**积分算子**。另外，把对函数 u 乘以函数 q 而得到 qu 的算子記为 Q，則由

$$(Qu=qu) \quad u^{(m)}=-KQu^{(m-1)},$$

得到

$$u^{(m)}=(-1)^m KQKQ\cdots QKf \quad (m \text{ 个 } Q).$$

从而，所求的解可以由

$$u=Kf-\varepsilon KQKf+\varepsilon^2 KQKQKf-\cdots \qquad (51.7)$$

給出。右边的第 n 項若詳細写出，就是一些 n 重积分的式子。

2) **收斂半徑，誤差** 解(51.7)完全是形式上求出的，現在研究一下它对什么样的 ε 收斂的問題。为此，考慮含 u 和 f 的适当的函数空間，并适当的引进范数是很有好处的(参照緒言)。假定 f 在 $G+\Gamma=\overline{G}$ 上連續，并記在 $\overline{G}$ 上連續的函数全体为 $\mathfrak{F}$，对属于 $\mathfrak{F}$ 的函数 v 采用下面的范数：

$$\|v\|=\max_{x, y\subset \overline{G}}|v(x, y)|. \qquad (51.8)$$

于是算子 K 不但使 $\mathfrak{F}$ 的任意元化为 $\mathfrak{F}$ 的元，并为有界。即存在着不依賴于 v 的常数 M，使得

$$\|Kv\|\leqq M\|v\|. \qquad (51.9)$$

事实上，因为 Green 函数为正，所以

$$|Kv(x, y)|\leqq\int_G K(x, y;\xi, \eta)|v(\xi, \eta)|d\xi d\eta$$

$$\leqq\|v\|\int_G K(x, y;\xi, \eta)d\xi d\eta,$$

但是，若 G 为有界域时，則存在着滿足下列关系：

$$\int_G K(x, y; \xi, \eta)d\xi d\eta\leqq M \qquad (51.10)$$

并且不依賴于 x, y 的常数 M，这个事实，可以利用定理："当域 G

增大时，G 的 Green 函数也增加"，并令 K 与适当的圆形域的 Green 函数相比較，便可証明。又須注意，Green 函数虽然在 $(x, y)=(\xi, \eta)$ 处有奇异点，但上述的积分是存在的。这些事实即使在 n 維 Laplace 算子的情形也同样成立。

一般地，称使(51.9)成立的 M 的最小值为算子 K 的范数，并記为 $\|K\|$ (这与函数 $K(x, y; \xi, \eta)$ 的范数不同)。同样地，記算子 Q 的范数为 $\|Q\|$。若 $q(x, y)$ 在 $\overline{G}$ 連續，則 $\|Q\|$ 有限，它与函数 q 的范数 $\|q\|$ 是一致的。

由于

$$u^{(m)}=-KQu^{(m-1)},$$

所以

$$\|u^{(m)}\|=\|KQu^{(m-1)}\|\leqq\|K\|\|Qu^{(m-1)}\|\leqq\|K\|\|Q\|\|u^{(m-1)}\|,$$

翻复的使用这个式子，便得到

$$\|u^{(m)}\|\leqq(\|K\|\|Q\|)^m\|K\|\|f\|, \tag{51.11}$$

所以級数(51.7)当

$$|\varepsilon|<1/\|K\|\|Q\| \tag{51.12}$$

时，在所給范数的意义下收斂。但是由于我們的范数的定义为(51.8)，所以按照这种范数的收斂，不外是函数的**一致收斂**。从而(51.7)是連續函数的級数，并且一致收斂，所以极限 u 确实存在并为連續函数。但是，u 是否为二次可微的函数，从而为(51.1)的解，这一情况仍不是显然的。实际上，若只要求 f 与 q 的連續性并不能保証这件事。只有附加以适当的条件后，才能証明这一点。但是这种証明与証明(51.1)的解的存在性同样是很复杂的，所以这里不去研究它。关于这些問題希参照泛函分析的有关項目。

当取級数(51.7)的有限項时，可以象下面这样来估計誤差。

$$\|u-(u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\cdots+\varepsilon^m u^{(m)})\|$$
$$=\|\varepsilon^{m+1}u^{(m+1)}+\varepsilon^{m+2}u^{(m+2)}+\cdots\|$$

$$\leq |\varepsilon|^{m+1}\|u^{(m+1)}\| + |\varepsilon|^{m+2}\|u^{(m+2)}\| + \cdots$$
$$\leq |\varepsilon|^{m+1}(\|K\|\|Q\|)^{m+1}\|K\|(1+\varepsilon\|K\|\|Q\|+\cdots)\|f\|$$
$$= |\varepsilon|^{m+1}\frac{(\|K\|\|Q\|)^{m+1}}{1-\varepsilon\|K\|\|Q\|}\|K\|\|f\|. \qquad (51.13)$$

由此，若(51.7)取到 ε^m 項为止，其誤差一致的为 ε^{m+1} 程度。

3) **一般化** 上面叙述过的方法是比較抽象的，所以它的应用范圍，明显地不拘于方程(51.1)的特殊形式。一般对于綫性的边界值問題，可用适当的綫性算子 H 写成

$$Hu=f \qquad (51.14)$$

的形狀。边界条件已含于 H 的定义中。即 H 只对滿足所給边界条件的函数 u 起作用。特別是，若 H 含有小参数 ε，并有形式如 $H=H_0+\varepsilon V$ 时，上式成为

$$(H_0+\varepsilon V)u=f, \qquad (51.15)$$

即非攝动方程为

$$H_0u=f. \qquad (51.16)$$

这方程不仅对特別地 f 有解，我們假定它对所考虑的函数空間 $\mathfrak{F}$ 的任意 f 都有解。这也就是說，H_0 有逆 $H_0^{-1}=K$，(51.16) 的解是由

$$u=H_0^{-1}f=Kf \qquad (51.17)$$

給出的。前例中的 K 是用 Green 函数表示的积分算子。一般地，H_0 为微分算子，若給与适当的边界条件时，H_0 自身虽然不能对 $\mathfrak{F}$ 的任意函数起作用（如不能微分的函数!），但 $K=H_0^{-1}$ 一般是对 $\mathfrak{F}$ 的所有函数都能起作用的算子。

現在为了解(51.15)，从左边乘以 K，由于 $KH_0=1$（恒等算子），所以有

$$(1+\varepsilon KV)u=Kf,$$

从而形式地得到了解：

$$u=(1+\varepsilon KV)^{-1}Kf=[1-\varepsilon KV+\varepsilon^2(KV)^2-\cdots]Kf$$
$$=Kf-\varepsilon KVKf+\varepsilon^2 KVKVKf-\cdots \tag{51.18}$$

(Neumann 級数)．前例中的解 (51.7) 不外是这个式子的特殊情形。与前述同样，K 和 V 有界，并且当 $|\varepsilon|<1/\|K\|\|V\|$ 时，級数收斂。更一般地，若 V 虽非有界，但 VK 有界时，可以

$$|\varepsilon|<\|VK\|^{-1} \tag{51.19}$$

作为收斂的充分条件。

本节內容在本质上与綫性方程的逐次近似解法沒有什么差别(参看第 3 章 § 16, § 17)。

§ 52 固有值問題

1) 摄动法的問題 比前节討論的边界值問題稍为复杂的問題是摄动法在固有值問題上的应用。我們主要考虑在微分方程中的应用，因为最方便的方法是把固有值問題作为綫性算子的問題来考慮，所以我們先由抽象的方法开始研究。普通最常見的固有值問題是关于 Hilbert 空間自共軛算子的問題，所以在这里也先处理它(关于 Hilbert 空間的算子，参照泛函分析的有关項目)❶。关于这种算子 H 的固有值問題可写为 $Hu=\lambda u$(λ 为固有值，u 为固有元)，但是，若 H 含有小参数 ε，并有形式 $H=H_0+\varepsilon V$ 时，則为

$$(H_0+\varepsilon V)u=\lambda u. \tag{52.1}$$

假若已知 $\varepsilon=0$ 时，对于非摄动算子 H_0 的一組固有值問題的解为

$$H_0 u_0=\lambda_0 u_0, \tag{52.2}$$

則对于(52.1)的解可以表示为形如

$$\lambda=\lambda_0+\varepsilon\lambda^{(1)}+\varepsilon^2\lambda^{(2)}+\cdots, \tag{52.3}$$

$$u=u_0+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2 u^{(2)}+\cdots \tag{52.4}$$

❶ 可参看关肇直《泛函分析讲义》第三章。— 校者注

等的 ε 的幂級数。

这里需要注意的是，不論是固有元 u_0 或是 u，若乘以共同的常数因子，問題的性质仍然是不变的，所以它們不能唯一地确定。由于这种不定性，很难将它們写成(52.4)的形状。因此为了簡单起见，假定 H_0 的固有值 λ_0 不是多重的，即它仅对应一个綫性无关的固有元 u_0，并規定 $\|u_0\|=1$ 将它正規化。至此，则只有 u_0 的范数因子（絕对值为 1 的复数）不定，对这个因子可适当地規定。另外我們也希望能用 $\|u\|=1$ 来使 u 正規化，但是对于各 ε，由于剩下不定的范数因子是不方便的，所以比較适宜的办法是利用

$$(u,\ u_0)=1 \tag{52.5}$$

来正規化。这里 (,) 表示 Hilbert 空間的內积。根据这个条件，若 λ 不是多重的(这当然是預先設想的)，则 u 就唯一的被确定了，同时因为(52.5)为 u 的 1 次式，所以可以如下的使計算簡单化。

2) 基本方程的导出 一般如把(52.3)，(52.4)代入(52.1)，便得到可确定 $\lambda^{(m)}$，$u^{(m)}$ 的方程，这方法是常用的老套子，而且看起来也不很明确，因而在这里采取稍为不同的讲法。

設

$$u-u_0=\varepsilon v,\quad v=u^{(1)}+\varepsilon u^{(2)}+\cdots, \tag{52.6}$$

则由(52.5)和$(u_0,\ u_0)=\|u_0\|^2=1$，得到

$$(v,\ u_0)=0. \tag{52.7}$$

将(52.6)代入(52.1)并注意(52.2)，得到

$$\lambda_0 u_0+\varepsilon V u_0+\varepsilon H_0 v+\varepsilon^2 V v=\lambda u_0+\varepsilon\lambda v. \tag{52.8}$$

对这式右乘 u_0 作内积，注意 H_0 为自共軛的假定，因为

$$(H_0 v,\ u_0)=(v,\ H_0 u_0)=\lambda_0(v,\ u_0)=0,$$

所以

$$\lambda_0+\varepsilon(V u_0,\ u_0)+\varepsilon^2(V v,\ u_0)=\lambda. \tag{52.9}$$

另外，将(52.8)改写为

$$\varepsilon(H_0-\lambda_0)v+\varepsilon Vu_0-(\lambda-\lambda_0)(u_0+\varepsilon v)+\varepsilon^2 Vv=0. \quad (52.10)$$

在这里导人 $H_0-\lambda_0$ 的一种逆算子。因为 $H_0-\lambda_0$ 的固有值为 0，所以它的逆原来是不存在的，但是在由与固有元 u_0 正交的元所构成的部分空間 $\mathfrak{M}$ 内它都有逆元。为了表示这个，譬如，有由 H_0 的固有元生成的完备的正規正交系，設为 $u_0, u_1, u_2, \cdots$，并設相应的固有値为 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots$. 将任意的元 w 展开为

$$w=\sum_{m=0}^{\infty} c_m u_m, \quad c_m=(w, u_m),$$

并从

$$Sw=\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\lambda_m-\lambda_0} u_m \quad (52.11)$$

定义算子 S 时，它就是所求的"逆"。事实上，因为

$$((H_0-\lambda_0)Sw, u_m)=(Sw, (H_0-\lambda_0)u_m)$$

$$=(Sw, (\lambda_m-\lambda_0)u_m)=\begin{cases}c_m & (m\geqq 1),\\ 0 & (m=0),\end{cases}$$

所以

$$(H_0-\lambda_0)Sw=w-c_0u_0=w-(w, u_0)u_0. \quad (52.12)$$

同理，得

$$S(H_0-\lambda_0)w=w-c_0u_0=w-(w, u_0)u_0. \quad (52.13)$$

由于 $w\perp u_0$，即 $c_0=0$，故得到 $(H_0-\lambda_0)Sw=S(H_0-\lambda_0)w=w$，所以，在与 u_0 正交的部分空間上，S 便是 $H_0-\lambda_0$ 的逆。还須注意

$$Su_0=0. \quad (52.14)$$

并且形如 Sw 的元与 u_0 正交。这是因为(52.11)的右边不含 u_0 的緣故。

那末，因为由(52.7)知 $v\perp u_0$，現在用 S 左乘(52.10)，并注意(52.14)，得到

$$\varepsilon v+\varepsilon SVu_0-\varepsilon(\lambda-\lambda_0)Sv+\varepsilon^2 SVv=0.$$

利用(52.9)消去 λ，再用 ε 除之，得到

$$v=-SVu_0-\varepsilon S(V-\alpha)v+\varepsilon^2(v, Vu_0)Sv, \quad (52.15)$$

其中

$$a=(Vu_0,\ u_0),\tag{52.15'}$$

这里利用了$(Vu_0,\ v)=(u_0,\ Vv)$(为自共軛)。

3) **基本方程的充分必要性** (52.15)是我們的基本方程。为了便于应用逐次近似法(第2章),可以把它写成

$$v=F[v]\tag{52.16}$$

的形式。"函数"$F[v]$虽是关于v的"2次式",但是由于v实际是向量(或是函数)。因而,这方程并不象所想的那样簡单。

(52.15)是v必須满足的必要条件,但反过来,满足这个式子的v是否真能确定解,还有研究的必要。(52.15)的右边各項的最左边有因子S(数値系数除外),所以(52.15)的解自然满足条件(52.7)。注意了这一点后,再以$H_0-\lambda_0$左乘(52.15),则由(52.12),(52.15')得到

$$(H_0-\lambda_0)v=-Vu_0+\alpha u_0-\varepsilon(V-a)v+\varepsilon(Vv,u_0)u_0+\varepsilon^2(v,Vu_0)v.$$

故若以(52.9)定义λ,通过簡单的計算便可看到(52.10)也显然被满足,这就証明了λ和$u=u_0+\varepsilon v$是固有値問題的解。

4) **攝动級数的計算** 根据逐次近似法的一般理論,若在满足常系数$K<1$的Lipschitz条件的v的范围内,对$F[v]$进行逐次近似,则近似法收斂,并給出(52.16)的解。于是立刻可以看到,只要取$|\varepsilon|$充分的小,这个条件便能被满足。

但是摄动法的目的,与其說是用逐次近似法去解(52.16),还不如說将其結果表示成ε的冪級数更为重要。所以在这里,我們从稍微不同的角度来观察一下(52.15). 若把v的級数展开式(52.6)代入(52.15),便得到了确定系数$u^{(m)}$的遞推公式。即

$$\left.\begin{aligned}&u^{(1)}=-SVu_0,\\&u^{(m+1)}=-S(V-a)u^{(m)}+\sum_{i=1}^{m-1}(u^{(i)},\ Vu_0)Su^{(m-i)}\\&\qquad\qquad(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).\end{aligned}\right\}\tag{52.17}$$

由此有

$$\left.\begin{aligned}u^{(1)}&=-SVu_0,\\u^{(2)}&=S(V-\alpha)SVu_0,\\u^{(3)}&=-S(V-\alpha)S(V-\alpha)SVu_0+(SVu_0,Vu_0)S^2Vu_0.\end{aligned}\right\}\quad(52.18)$$

若把 v 代入(52.9),便可算出 λ. 从而

$$\left.\begin{aligned}\lambda^{(1)}&=(Vu_0,\ u_0)=\alpha,\\\lambda^{(m)}&=(u^{(m-1)},\ Vu_0)\quad(m=2,\ 3,\ \cdots).\end{aligned}\right\}\quad(52.19)$$

若将(52.18)代入,則

$$\left.\begin{aligned}&\lambda^{(1)}=\alpha,\qquad\lambda^{(2)}=-(SVu_0,\ Vu_0),\\&\lambda^{(3)}=(S(V-\alpha)SVu_0,\ Vu_0),\\&\lambda^{(4)}=-(S(V-\alpha)S(V-\alpha)SVu_0,\ Vu_0)\\&\qquad+(SVu_0,\ Vu_0)\|SVu_0\|^2.\end{aligned}\right\}\quad(52.20)$$

我們的 u 是已根据 (52.5) 正規化了的,如所周知,为了使它具有 $(u,\ u)=1$ 的正規化条件,只要用 $\|u\|=(u,\ u)^{\frac{1}{2}}$ 除 u 即可。由于

$$\begin{aligned}(u,\ u)&=(u_0+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2u^{(2)}+\cdots,\ u_0+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2u^{(2)}+\cdots)\\&=1+\varepsilon^2\|u^{(1)}\|^2+\varepsilon^3[(u^{(1)},\ u^{(2)})+(u^{(2)},\ u^{(1)})]+\cdots,\end{aligned}$$

所以

$$\bar{u}=\|u\|^{-1}u=u_0+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2\left[u^{(2)}-\frac{1}{2}\|u^{(1)}\|^2u^{(0)}\right]+\cdots\quad(52.21)$$

即为所求的。

§53 固有值問題(續)

1) **收斂半徑,誤差** 为了指出前节所求的 u,λ 的幂級数是收斂的,最便利的方法是使用优級数。与关于向量 v 的方程(52.15)同时,考虑关于数 ω 的下列方程。$\|S\|$表示算子 S 的范数(参照前节)。

$$\omega=\|SV\|+\varepsilon\|S(V-\alpha)\|\omega+\varepsilon^2\|Vu_0\|\|S\|\omega^2.\quad(53.1)$$

假若将解展成

$$\omega=\omega^{(1)}+\varepsilon\omega^{(2)}+\varepsilon^2\omega^{(3)}+\cdots \tag{53.2}$$

则决定 $\omega^{(m)}$ 的式子与(52.17)有同样形状,而为

$$\left.\begin{aligned}&\omega^{(1)}=\|SV\|,\\&\omega^{(m+1)}=\|S(V-\alpha)\|\omega^{(m)}+\sum_{i=1}^{m-1}\|Vu_0\|\|S\|\omega^{(i)}\omega^{(m-i)}.\end{aligned}\right\} \tag{53.3}$$

但是,比較(52.17)与(53.3),则有

$$\|SVu_0\|\leqq\|SV\|\|u_0\|=\|SV\|,$$

$$\begin{aligned}\|(u^{(i)},\ Vu_0)Su^{(m-i)}\|&=|(u^{(i)},\ Vu_0)|\,\|Su^{(m-i)}\|\\&\leqq\|Vu_0\|\,\|S\|\,\|u^{(i)}\|\,\|u^{(m-i)}\|,\end{aligned}$$

所以,首先得到 $\|u^{(1)}\|\leqq\omega^{(1)}$, 以下可用归納法証明

$$\|u^{(m)}\|\leqq\omega^{(m)}\quad(m=1,\ 2,\ \cdots). \tag{53.4}$$

因此,对于使(53.2)收斂的 ε, (52.6)与(52.4)中的級数都是"絕对收斂"的。

然而,因为(53.1)关于 ω 是二次方程,所以它的解立即可求出。两个解中的一个是

$$\omega=\frac{2\|SV\|}{1-\varepsilon\|S(V-\alpha)\|+[(1-\varepsilon\|S(V-\alpha)\|)^2-4\|Vu_0\|\|S\|\|SV\|\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}, \tag{53.5}$$

它确实具有(53.2)的形状,所以必为(53.2)自身。至于这个函数的 Taylor 級数的收斂半徑,可以由使[ ]内为0的 ε 值給出。所以,若令(52.4)的收斂半徑为 r, 则

$$r\geqq\frac{1}{\|S(V-\alpha)\|+2(\|Vu_0\|\|S\|\|SV\|)^{1/2}}. \tag{53.6}$$

上面的方法不仅可得到收斂半徑,也能估計出把級数(52.3),(52.4)取至有限項为止时的誤差(剩余)。这是因为,由于

$$\|u^{(m)}\|\leqq\omega^{(m)},$$

所以对于 v 的剩余,不大于相应的 ω 的剩余。于是对于 u 的剩余可得

$$\begin{aligned}&\|u-(u_0+\varepsilon u^{(1)}+\cdots+\varepsilon^m u^{(m)})\|\\&\quad=|\varepsilon|\,\|v-(u^{(1)}+\varepsilon u^{(2)}+\cdots+\varepsilon^{m-1}u^{(m)})\|\\&\quad\leqq|\varepsilon|\,[\omega-(\omega^{(1)}+\varepsilon\omega^{(2)}+\cdots+\varepsilon^{m-1}\omega^{(m)})].\end{aligned}\tag{53.7}$$

再由(52.9)，作为 λ 的剩余$(m\geqq 1)$，可得

$$\begin{aligned}&|\lambda-(\lambda_0+\varepsilon\lambda^{(1)}+\cdots+\varepsilon^m\lambda^{(m)})|\\&\quad=|\varepsilon|^2|(v-(u^{(1)}+\varepsilon u^{(2)}+\cdots+\varepsilon^{m-2}u^{(m-1)}),\,Vu_0)|\\&\quad\leqq|\varepsilon|^2\|Vu_0\|\,[\omega-(\omega^{(1)}+\varepsilon\omega^{(2)}+\cdots+\varepsilon^{m-2}\omega^{(m-1)})].\end{aligned}\tag{53.8}$$

这些式中的 ω 如(53.5)。

2) **注意事項** 为了使上面的結果正确，S, SV 必須为有界算子。若 H_0 的固有值 λ_0 孤立时，S 确为有界的，即

$$\|S\|\leqq 1/d.\tag{53.9}$$

这里的 d 表示 H_0 的其余的固有值 λ_1, λ_2, $\cdots$ 中与 λ_0 最近的到 λ_0 的距离。根据(52.11)不难得知

$$\|Sw\|^2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|c_m|^2}{|\lambda_m-\lambda_0|^2}\leqq\frac{1}{d^2}\sum_{m=1}^{\infty}|c_m|^2\leqq\frac{\|w\|^2}{d^2}.$$

若 V 有界，则 SV 当然有界，但 V 无界时，SV 也可能有界。那只要 V 为“与 H_0 相比有界”即可。确切的說，有滿足

$$\|Vw\|\leqq M\|w\|+N\|H_0w\|$$

的常数 M, N 即可。

若这样的条件不被滿足，SV 无界，则級数(52.3)，(52.4)是否收斂，便不得而知了。实际上，对于无論多么小的 $\varepsilon\neq 0$ 也可能发散。不但如此，也可能由某个 m 起，求不出再下面的 $\lambda^{(m)}$ 与 $u^{(m)}$ 了。但是在这种情况下，并不能說：摄动法是无效的。作为冪級数不收斂，并且仅存在有限个項的 ε 的級数，若把它解釋为 $\varepsilon\to 0$ 时的漸近級数，常常会很有用处。因为这部分的内容属于奇异摄动論，故本书中不进行研究了。

若非摄动固有值 λ_0 为多重时，不改变上面的論述是不行的，

有的地方必須作适当地修正。但是这些修正不过是形式的問題，本书因篇幅的限制，将此省略。

例 $$-\frac{d^2u}{dx^2}+\varepsilon(2x-1)u=\lambda u,\quad 0\leqq x\leqq 1,$$

边界条件

$$u(0)=u(1)=0.$$

采用

$$\lambda_0=\pi^2=9.86960,\quad u_0(x)=\sqrt{2}\sin\pi x$$

作为 $\varepsilon=0$ 时的非摄动固有值問題的解。λ_0 为最小固有值，因其距离最近的固有值为 $\lambda_1=4\pi^2$，故 $d=3\pi^2$. 从而 $\|S\|=1/d=1/3\pi^2$. 又因 V 是乘以 $2x-1$ 的算子，因 $|2x-1|\leqq 1$ $(0\leqq x\leqq 1)$，所以 $\|V\|=1$. 因而

$$\|SV\|\leqq\|S\|\|V\|\leqq 1/3\pi^2.$$

又因为

$$\|Vu_0\|^2=2\int_0^1(2x-1)^2\sin^2\pi x dx=0.1307,$$

$$\|Vu_0\|=0.3615,\quad \alpha=0.$$

从此，根据 (53.6)λ 与 u 的展开式的收斂半徑都为

$$r\geqq\left(\frac{1}{3\pi^2}+\frac{2\times\sqrt{0.3615}}{3\pi^2}\right)^{-1}=13.44.$$

当 $\varepsilon=1$ 时，只取 λ 的級数的前数項，試求这时的誤差。于(53.8)，若令 $m=1$，并注意 $\lambda^{(1)}=\alpha=0$，则得到

$$|\lambda-\lambda_0|\leqq\|Vu_0\|\omega\leqq 0.0126,\quad \lambda=9.8696\pm 0.0126.$$

若計算到 ε^2 項，则得到

$$|\lambda-\lambda_0-\lambda^{(2)}|\leqq\|Vu_0\|(\omega-\omega^{(1)})\leqq 0.00043.$$

由(52.20)，$\lambda^{(2)}$ 的值是

$$\lambda^{(2)}=-(SVu_0,\ Vu_0),$$

若根据 S 的式(52.11)，则有

$$\begin{aligned}\lambda^{(2)}&=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|(Vu_0,\ u_m)|^2}{\lambda_m-\lambda_0}\\&=-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+2)}\left(\int_0^1(2x-1)\sin(m+1)\pi x\sin\pi x dx\right)^2\\&=-\frac{256}{\pi^6}\sum_{m\text{偶}}\frac{m^2}{(m^2-1)^5}=-0.00438.\end{aligned}$$

由此

$$\lambda = 9.86522 \pm 0.00043.$$

我們虽然能求出

$$|\lambda - \lambda_0 - \lambda^{(2)} - \lambda^{(3)}| \leqq 0.000018,$$

但計算 $\lambda^{(3)}$ 还是相当麻烦的。

第8章 WKB法

若微分方程含有小参数 ε (或大参数 k)，当参数为0 (或无限大) 的方程的解容易求出时，摄动法中常将此解作为第0近似，然后逐次增高近似的精确程度(第7章)。但是，对特殊情形，若方程的最高阶項的系数在极限情况变成非常小的时候，这个方法常常陷于失敗。

处理这种特殊情形，需要对不同的情形使用独特的办法。这样所得到的解一般称为漸近解。这时即使把逐次近似作到头，也不一定能获得收斂的結果。但是就参数值而言，常能以它的最初几項表示出与眞正解极为相近的值，所以这种方法也是很有用的。

这种方法中，最著名的是由于解2阶常微分方程而发展起来的WKB法。本章以叙述这个方法为主，再涉及一些关于这个方法在偏微分方程上的直接应用。

§54 引　言

Jeffreys 为了解最古典的波动問題，对于求关于 z 的函数 $\Phi(z)$ 的2阶綫性常微分方程[1]

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}+k^2P(z)\Phi=0 \tag{54.1}$$

当 $k\to\infty$ 时的漸近解的方法，作了系統的論述(1924)。另外，

---

[1] 最一般的方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+2a(z)\frac{dw}{dz}+b(z)w=0, \tag{54.1'}$$

对变数作置換

$$w(z)=\Phi(z)\exp\left[-\int^z a(z)dz\right], \qquad b-a'-a^2=k^2P(z),$$

或者，变換独立变数

$$\zeta=\int e^{-2\int a(z)dz}dz,$$

也可化为标准形(54.1)，因而論述(54.1)也就足够了。

Wentzel, Kramers, Brillouin 等(1926)为了探討在 Schrödinger 方程中，当 Planck 常数 h 趋近0时所出現的(古典力学的极限)性质，和粒子通过势(potentiar)垒的問題，各自独立地进行过研究。

因此，現今称这种方法为 Jeffreys 方法，WKB 法或 WKBJ 法。

在(54.1)中，若簡单地令 $k\to\infty$，并忽視 $\frac{d^2\Phi}{dz^2}$，则它就不成为微分方程了。实际上，若以 k^2 除(54.1)，以 $\zeta=kz$ 代替独立变数 z，則 k 便从表面上消失，但是可以看到，第1項并不是想象那样可以随便忽視的。特别是，当 P 为常数时的解是

$$\Phi=Ae^{ik\sqrt{P}z}+Be^{-ik\sqrt{P}z}, \tag{54.2}$$

由此它的作用便可一目了然。上面提到的几个人所取的方法是：总假設 $P(z)$ 与 k 相比变动甚微，即似乎接近于一定的常数，并假定方程具有与(54.2)形状相似的近似解

$$\Phi=\exp[ik\varphi(z)]. \tag{54.3}$$

将(54.3)代入(54.1)，則得

$$-k^2\varphi'^2+ik\varphi''+k^2P=0. \tag{54.4}$$

第2項比其余的項小，若将它忽視，取第0近似为

$$\varphi_0'=\pm P^{\frac{1}{2}}, \tag{54.5}$$

卽得

$$\varphi_0=\pm\int P^{\frac{1}{2}}dz. \tag{54.6}$$

当 P 为一定时，它就是(54.2)。为了了解在(54.4)中所忽略的

$$\left|\frac{ik\varphi''}{k^2P}\right|=\left|\frac{\varphi''}{kP}\right|\ll1 \tag{54.7}$$

的意义，将(54.6)代入，則有

$$|k|\gg\left|\frac{\varphi_0''}{P}\right|=\left|\frac{P'}{2P^{\frac{3}{2}}}\right|. \tag{54.8}$$

由此就能知道近似成立的必要条件。特别要注意下列几点：

（i）在 P 变化激烈（P' 大）处，相应地，k 也必須大。相反地，若 P 的变化緩和，則即便 k 变成很小也沒有关系。

（ii）在 $P=0$ 处不論取多大的 k，上述的近似也是无意义的。一般地，称 $P(z)$ 的零点 $z_0(P(z_0)=0)$ 为轉移点 (turning point)。若这种点出現在問題区域时，就需要特殊的討論。

特别在实函数的范圍內，$z=x=$ 实数，若 k，P 也为实数，在 $P(x)>0$ 的区域，由 (54.3)，(54.6) 可知，当近似解中的指数为純虛数时，近似解为三角函数（振动型）。在 $P(x)<0$ 的区域，当指数为实数时，解为单調的指数函数型。(54.2) 便是它們的典型情形。

例　在 1 維能場 $V(x)$，質量 M 的粒子运动的 Schrödinger 方程是

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi+\frac{2M}{\hbar^2}[E-V(x)]\Psi=0, \tag{54.9}$$

E 是全能量。$2M/\hbar^2$ 与运动能 $E-V(x)$ 分别相当于 k^2 与 $P(x)$。$P<0$ 相当于古典理論中粒子进不去的区域（运动能为負），粒子在轉移点 x_0 处返回，其运动区域限于 $P(x)=E-V>0$。在量子力学里，确率振幅 Ψ 的絕对值，当 $P>0$ 时，为振动型。$P<0$ 时，若稍微离开 x_0，則便是指数型的。

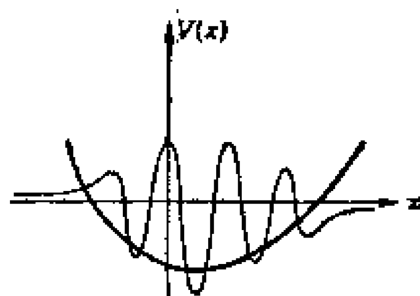


图　54.1

在折射率在每点都不同的介質中，波的傳播也滿足与此形状相同的方程。

在实际問題中，会出現阶数更高的方程（例如，粘性流体流层的稳定性，彈性論里对于承受載荷与張力的薄板問題的 4 阶以上的方程），但是处理的基本方法与这里所讲的是一样的。

偏微分方程問題，若方程可能分离变量时，也归結为 (54.1) 的問題。一般在这种情形的解是特殊函数，并可形式的写成无穷級数或无穷积分的形状。但是作实际的数值計算时，若不借助于

(54.1)在 $k\to\infty$ 时的渐近展开，常常是达不到目的的。在不能归結为已知的特殊函数的情形，形式解的作用就更談不到了。

对于不能分离变量的偏微分方程，最近也开始試驗了直接推广上面的方法，借以求方程的渐近解（当然需要满足边界条件和初始条件）。

§55 无轉移点的情形

在离开轉移点的地方，增高(54.6)的近似是容易的。即，令

$$\varphi=\varphi_0+\frac{1}{k}\varphi_1+\frac{1}{k^2}\varphi_2+\cdots \tag{55.1}$$

代入(54.4)，再比較 k^2, k^1, k^0, …各項，則得

$$\varphi_0'^2=P, \tag{55.2}$$

$$2\varphi_0'\varphi_1'=i\varphi_0'', \tag{55.3}$$

$$2\varphi_0'\varphi_2'=i\varphi_1''-\varphi_1'^2, \tag{55.4}$$

…………………

順次地解上列方程，得到

$$\varphi_0'=\pm P^{\frac{1}{2}},\quad \varphi_1'=\frac{i}{2}\frac{\varphi_0''}{\varphi_0'}=\frac{i}{4}\frac{P'}{P}=\frac{i}{4}(\log P)', \tag{55.5}$$

$$\varphi_2'=\frac{i\varphi_1''-\varphi_1'^2}{2\varphi_0'}=\pm\frac{5P'^2-4PP''}{32P^{\frac{5}{2}}}. \tag{55.6}$$

再分别作关于 z 的积分，然后代入(55.1)，(54.3)，則得

$$\Phi\sim\exp\left[\pm ik\int P^{\frac{1}{2}}dz-\frac{1}{4}\log P+\cdots\right]$$

$$=P^{-\frac{1}{4}}\exp(\pm ik\tau)+O\left(\frac{1}{k}\right), \tag{55.7}$$

$$\tau=\int^z P^{\frac{1}{2}}dz. \tag{55.8}$$

若問題限于实函数时，应区别 $P>0$, $P<0$ 的情形，比較便利

的方法是，对 $P>0$ 即波动型，取

$$\Phi=P^{-\frac{1}{4}}[Ae^{ik\tau}+Be^{-ik\tau}], \tag{55.9}$$

对 $P<0$ 即指数型(注意 $\tau=\pm i|\tau|$)，取

$$\Phi=|P|^{-\frac{1}{4}}[A'e^{k|\tau|}+B'e^{-k|\tau|}]. \tag{55.9'}$$

普通应用的 WKB 方法常是满足于这样的近似程度。

例 Bessel 函数的渐近展开(1). Bessel 函数 $C_\nu(kz)$ 是下列微分方程的解：

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(k^2-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0. \tag{55.10}$$

当变数 kz 与次数 ν 相比，非常大时，容易求出渐近展开，但若 ν 和 kz 同时增大时，渐近展开的求法就非常困难了，普通要用鞍点法去求(参照本丛书《特殊函数》)。在这里作为其中的一种情形，求 z 为有限，并不太接近 1，$\nu=k$ 非常大时的 $C_\nu(kz)$ 的渐近展开(Debye 的渐近展开)。按照(54.1)的脚注，先进行函数变换，并考虑 $2a(z)=1/z$，则得

$$\Phi(z)=C_\nu(kz)\exp\int\frac{dz}{2z}=\sqrt{z}\,C_\nu(kz), \tag{55.11}$$

$$k^2P(z)=k^2-\frac{\nu^2}{z^2}+\frac{1}{4z^2}. \tag{55.12}$$

設 $\nu=k$，取 $k\to\infty$，则在 (55.7) 的精确度上可忽视 $P(z)$ 的最后的项。轉移点的位置与 $z=1$ 非常接近。为使 (55.8) 的积分簡化，設 $z=\sec\theta$，则得 $dz=\sec^2\theta\sin\theta d\theta$，若忽视 $O(1/k^2)$ 項，则有

$$P\fallingdotseq\sin^2\theta, \tag{55.13}$$

$$\tau\fallingdotseq\int_0^z\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}\,dz=\int_0^\theta\tan^2\theta d\theta=\tan\theta-\theta. \tag{55.14}$$

将此式代入(55.9)，则得

$$C_k^{\pm}(k\sec\theta)=\frac{1}{\sqrt{\sec\theta}}\Phi\pm\sim\frac{1}{\sqrt{\tan\theta}}\exp[\pm ik(\tan\theta-\theta)]. \tag{55.15}$$

与(55.9)同样，若 z 为比 1 小的实数时，令 $z=\operatorname{sech}\theta$，其中 θ 也为实数較为便利。此时

$$P\fallingdotseq-\sinh^2\theta,\quad \tau=i(\tanh\theta-\theta), \tag{55.16}$$

$$\widetilde{C}_k^{\pm}(k\,\mathrm{sech}\,\theta)\propto\frac{1}{\sqrt{\mathrm{sech}\,\theta\cdot\sinh\theta}}\,e^{\pm k|\tau|}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\tanh\theta}}\exp[\pm k(\tanh\theta-\theta)]. \qquad (55.17)$$

若除掉这里的常数因子,则它与在(55.15)中把 θ 换成 $i\theta$ 后所得的式子相同,但是因为 $\theta=0$ 是轉移点,故需要特別注意,两者之間既沒有直接关系,也沒有解析延拓的关系。

現在找出 Bessel 函数的标准形(第1种 Bessel 函数) $J_k(kx)$, Hankel 函数 $H_k^1(kx)$, $H_k^2(kx)$ 等的关系。在(55.15)中,固定 k,取 $\theta\to\frac{\pi}{2}$,从而若令 $\sec\theta\to\infty$ 并考虑 $\tan\theta=\sqrt{\sec^2\theta-1}\sim\sec\theta$ $\left(为了簡单起見,使 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,则得

$$C_k^{\pm}(k\sec\theta)\sim\frac{1}{\sqrt{\sec\theta}}\exp\left[\pm ik\left(\sec\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right]. \qquad (55.18)$$

将这个式子与 Hankel 函数 $H_\nu^{1,2}(kz)$ 当 $|kz|\to\infty$ 时的渐近展开(ν 固定),即

$$H_\nu^{1,2}(kz)\sim\left(\frac{2}{\pi kz}\right)^{1/2}\exp\left[\pm i\left(kz-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$|kz|\to\infty,\quad |\arg kz|<\pi \qquad (55.19)$$

比較,则得

$$C_k^{\pm}(kz)=\left(\frac{\pi k}{2}\right)^{1/2}e^{\pm\frac{\pi}{4}i}H_k^{1,2}(kz), \qquad (55.20)$$

或者

$$H_k^{1,2}(k\sec\theta)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi k\tan\theta}}\exp\left[\pm ik(\tan\theta-\theta)\mp\frac{\pi}{4}i\right], \qquad (55.21)$$

$$|\arg k|<\pi,\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

另外在(55.17)中,若令 k 固定, $\theta\to\infty$,则 $x=\mathrm{sech}\,\theta\to0$ (令 $0<\theta<\infty$),因而

$$\tanh\theta\sim1-O(x^2),\quad \theta\sim-\log\frac{x}{2}, \qquad (55.22)$$

故有

$$\widetilde{C}_k^{\pm}(kx)\sim\exp\left[\pm k\left(1+\log\frac{x}{2}\right)\right]=\left(\frac{x}{2}\right)^{\pm k}e^{\pm k}. \qquad (55.23)$$

将此式与第1种 Bessel 函数 $J_{\pm k}(kx)$ 当 k 固定, $x\to0$ 时的展开式

$$J_{\pm k}(kx) \sim \frac{(kx/2)^{\pm k}}{\Gamma(1\pm k)} \quad (1\pm k \neq 負整数) \tag{55.24}$$

比較，則得

$$\tilde{C}_k^{\pm}(kx) = \Gamma(1\pm k)\left(\frac{e}{k}\right)^{\pm k} J_{\pm k}(kx), \quad x>0, \tag{55.25}$$

或者

$$J_{\pm k}(k \operatorname{sech}\theta) \sim \frac{(k/e)^{\pm k}}{\Gamma(1\pm k)\sqrt{\tanh\theta}} \cdot \exp[\pm k(\tanh\theta - \theta)] \quad (\infty > \theta > 0). \tag{55.26}$$

若令 $\operatorname{Re} k>0$，再利用 Stirling 公式 $\Gamma(1+k)\sim\sqrt{2\pi k}(k/e)^k$ 以及公式 $\Gamma(k)\Gamma(1-k)=\pi/\sin(k\pi)$，便可写成更簡单的形式(注意 k 为整数时，$J_{-k} = (-1)^k J_k$)，即

$$J_{\pm k}(k\operatorname{sech}\theta) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi k \tanh\theta}} \exp[k(\tanh\theta - \theta)], \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2}\sin k\pi}{\sqrt{k\pi}\tanh\theta} \exp[-k(\tanh\theta - \theta)], \end{cases} \tag{55.27}$$

$$\infty > \theta > 0, \quad \operatorname{Re} k > 0, \quad -k \neq 整数.$$

因 $\infty>\theta>0$ 时 $\theta>\tanh\theta$，又 $\operatorname{Re} k>0$ 时 $J_{-k}(kx)\gg J_k(kx)$ $(x>0)$，参照 $H_\nu^{1,2}(z)$ 和关于 Neumann 的函数 $Y_\nu(z)$ 的公式

$$\left.\begin{aligned} Y_\nu(z) &= \frac{1}{\sin\nu\pi}[\cos\nu\pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)], \\ H_\nu^{1,2}(z) &= J_\nu(z) \pm iY_\nu(z), \end{aligned}\right\} \tag{55.28}$$

忽視微小量 $J_k(kx)$，則下式成立：

$$H_k^1(kx) \sim -H_k^1(kx) \sim iY_k(kx) \sim i\left(\frac{-1}{\sin k\pi}\right) J_{-k}(kx)$$

$$\sim -i\sqrt{\frac{2}{k\pi\tanh\theta}} \exp[k(\theta - \tanh\theta)], \tag{55.29}$$

$$\operatorname{Re} k>0, \quad x=\operatorname{sech}\theta, \quad 0<\theta<\infty.$$

对于(55.21)令 $\theta\to i\theta$ 后，形式上不一定能够得出 (55.29)．理由显然是由于轉移点 $x_0\sim 1$ 的存在。

§ 56 Liouville 变换

为了从数学理論上使近似的性质和誤差的估計更加明确，最

便利的方法是引用(55.7)所示的变换

$$\Phi = P^{-\frac{1}{4}}\Psi, \tag{56.1}$$

$$\tau = \int P^{\frac{1}{2}}dz, \tag{56.2}$$

将函数由 Φ 化为 Ψ，独立变数由 z 化为 τ. 这是 Liouville 在 Sturm-Liouville 問題里导入的变换。关于 z 的微分以"$'$"表之，关于 τ 的微分以"$\cdot$"表之，若令 $P^{\frac{1}{4}}=X$, $P^{-\frac{1}{4}}=Y$, 则

$$\frac{d}{dz}=\frac{d\tau}{dz}\cdot\frac{d}{d\tau}=X^2\frac{d}{d\tau},\quad \frac{d}{d\tau}=Y^2\frac{d}{dz}. \tag{56.3}$$

把由此得出的关系式

$$\Phi=\Psi/X,\quad \Phi'=X^2d(\Psi/X)/d\tau=X\dot{\Psi}-\dot{X}\Psi,$$
$$\Phi''=X^2d[X\dot{\Psi}-\dot{X}\Psi]/d\tau=X^2(X\ddot{\Psi}-\ddot{X}\Psi)$$
$$=X^3(\ddot{\Psi}-Q\Psi),$$

$$Q=\frac{\ddot{X}}{X}=Y\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{1}{Y}\right)=Y\cdot Y^2\frac{d}{dz}\left(Y^2\frac{d}{dz}\frac{1}{Y}\right)=-Y^3Y'' \tag{56.4}$$

代入(54.1)，则得

$$\frac{d^2\Psi}{d\tau^2}+(k^2-Q)\Psi=0, \tag{56.5}$$

这里的 Q 是

$$Q=P^{-\frac{1}{4}}\frac{d^2}{d\tau^2}(P^{\frac{1}{4}})=-P^{-\frac{3}{4}}\frac{d^2}{dz^2}(P^{-\frac{1}{4}})$$
$$=\frac{4PP''-5P'^2}{16P^3}. \tag{56.6}$$

由这里就知道，

(i) 若是 $Q=0$，即 $\Phi=P^{-\frac{1}{4}}e^{\pm ik\tau}$ 給出了(54.1)的精确解。这时从(56.6)的最后第二式为0，即有

$$P^{-\frac{1}{4}}=p_1z+q_1,\quad \text{也就是}\ P=\frac{q}{(z+p)^4}. \tag{56.7}$$

于是

$$\tau=\int^{z}\frac{\sqrt{q}}{(z+p)^2}dz=-\frac{\sqrt{q}}{z+p}. \tag{56.8}$$

若 P 为单調函数，并无轉移点，則在問題中的点 z 的近傍适当地选取常数 p，q，再以(56.7)形的函数作为 P 的近似(例如，直到对应的切綫相合)，那末即便 k 是很小的数，也可以得到很好的近似。

(ii) (56.5)指出了一种逐次近似法。即若 $k^2\gg|Q|$，則 Q 的項对 k^2 来說可以忽略，首先令 $Q=0$. 如我們所看到的那样，其解为

$$\Psi_0(\tau)=Ae^{ik\tau}+Be^{-ik\tau}. \tag{56.9}$$

为了得到进一步的近似，可把(56.5)写成

$$\frac{d^2\Psi}{d\tau^2}+k^2\Psi=Q\Psi. \tag{56.10}$$

假若此式的右边是已知的，則此式为关于 Ψ 的非齐次方程，参照齐次解(56.9)，并利用待定系数法形式的求解，則得到关于 Ψ 的 Volterra 第 2 种积分方程

$$\Psi(\tau)=Ae^{ik\tau}+Be^{-ik\tau}+\frac{1}{k}\int_{\tau_0}^{\tau}\sin k(\tau-t)Q(t)\Psi(t)dt. \tag{56.11}$$

特别，当 k 为实数 >0 时，若 P 为在問題的区間 $\tau_0<\tau<\tau_1$ 内的正的实函数，其近傍沒有轉移点，且至少 2 阶連續可微。則由(56.6) Q 成为有界的連續函数。那末，若根据积分方程理論，令(56.9)为第 0 近似，将此代入右边积分中的 Ψ，把得到的函数 Ψ_1，…等順次代入积分內的 Ψ，导出級数

$$\Psi_N(\tau)=\sum_{n=0}^{N}\psi_n(\tau), \tag{56.12}$$

但其中

$$\psi_0=\Psi_0,\quad \psi_{n+1}=\frac{1}{k}\int_{\tau_0}^{\tau}\sin k(\tau-t)Q(t)\psi_n(t)dt \tag{56.13}$$

当 $N\to\infty$ 时級数在区間 $\tau_0<\tau<\tau_1$ 中一致收斂，从而(56.11)給出

了(56.10)的解。又若設$|Q|$的最大值为$Q_{\max}$，利用数学归納法显然能証明下面的式子：

$$|\psi_n(\tau)|\leqq\frac{|A|+|B|}{n!}\frac{Q_{\max}^n|\tau_1-\tau_0|^n}{k^n},\qquad(56.14)$$

从而若(56.12)为第N近似时，誤差为

$$\begin{aligned}|\Psi-\Psi_N(\tau)|&<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|A|+|B|}{n!}\frac{Q_{\max}^n|\tau_1-\tau_0|^n}{k^n}\\&<\frac{|\tau_1-\tau_0|^{N+1}Q_{\max}^{N+1}}{(N+1)!k^{N+1}}\{|A|+|B|\}\exp\left[\frac{Q_{\max}|\tau_1-\tau_0|}{k}\right]\\&<C/k^{N+1}\end{aligned}\qquad(56.15)$$

(C为适当的常数)．特别若設$N=0$，則可知(56.9)的誤差为$O(1/k)$．

但是，除去特殊情形外，(56.13)中的积分都是不容易計算的。又当$k\tau$取复数值时，因得不出$|\sin k(\tau-t)|<1$，所以得不到估計式(56.15)，此时以漸近估計$|\Psi-\Psi_N(\tau)|/|\Psi_N(\tau)|<C|k|^{-(N+1)}$来代替。从而在实际問題中，正象以后所述的那样，形式的假定

$$\Psi_N\sim\exp\varphi(\tau)=\exp\left[ik\tau+\sum_{n=1}^{N}(ik)^{-n}\varphi_n(\tau)\right],\quad(56.16)$$

或者

$$\Psi_N\sim\sum_{n=0}^{N}k^{-n}\psi_n(\tau)e^{ik\tau},\qquad(56.17)$$

以此代入(56.5)，再比較k的各幂从而定出φ_n或ψ_n比較便利。但是得到的結果的級数一般是真正意义的漸近級数，而当$N\to\infty$时給出了发散的結果。

§57 无轉移点情形的精密化

把(56.16)代入(56.5)，再除去因数$\exp\varphi(\tau)$，則得到

$$\dot{\varphi}^2+\ddot{\varphi}+k^2-Q=0,\qquad(57.1)$$

即

$$2ik\sum_{n=1}^{N}(ik)^{-n}\dot{\varphi}_n+\sum_{n=1}^{N}(ik)^{-n}\ddot{\varphi}_n$$
$$+\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}(ik)^{-(m+n)}\dot{\varphi}_m\dot{\varphi}_n-Q=0. \qquad (57.2)$$

令 $(ik)^{-n}$ 的各項相加为零，則得

$$(ik)^0: \qquad 2\dot{\varphi}_1=Q, \qquad (57.3)$$
$$(ik)^{-1}: \qquad 2\dot{\varphi}_2+\ddot{\varphi}_1=0, \qquad (57.4)$$
$$(ik)^{-2}: \qquad 2\dot{\varphi}_3+\ddot{\varphi}_2+\dot{\varphi}_1^2=0, \qquad (57.5)$$

....

$$(ik)^{-N+1}: \quad 2\dot{\varphi}_N+\ddot{\varphi}_{N-1}+\sum_{m=1}^{N-2}\dot{\varphi}_m\dot{\varphi}_{N-m-1}=0. \qquad (57.6)$$

由(57.3)順次解之，并略去积分常数，容易得到

$$\varphi_1=\frac{1}{2}Q_1(\tau)=\frac{1}{2}\int Q(\tau)d\tau, \quad \varphi_2=-\frac{1}{2}\dot{\varphi}_1=-\frac{1}{4}Q,$$
$$\varphi_3=-\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}_2+\int\dot{\varphi}_1^2d\tau\right)=\frac{1}{8}\left(\dot{Q}-\int Q^2d\tau\right),$$
$$\varphi_4=-\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}_3+2\int\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2d\tau\right)$$
$$=-\frac{1}{16}\ddot{Q}+\frac{1}{8}Q^2=-\frac{1}{16}(\ddot{Q}-2Q^2),$$

.... (57.7)

至于另外的一个独立解，只要在上式中作代换 $i\to -i$ 就得出了。

綜合上面所述，就得到了今井(1948)公式：

$$\Psi\sim\exp\left[\pm ik\tau\mp\frac{i}{2k}\int Qd\tau+\frac{1}{4k^2}Q\pm\frac{i}{8k^3}\left(\dot{Q}-\int Q^2d\tau\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{16k^4}(\ddot{Q}-2Q^2)\right]+O\left(\frac{1}{k^5}\right). \qquad (57.8)$$

現在再簡单地介紹一下，由(57.3)～(57.6)所决定的 Ψ_N 就是(56.10)的漸近解。当然需要假設在 τ 的变域及其近傍无轉移

点，并設 $Q(\tau)$ 为单值正則。

設

$$\Psi=\Psi_N(\tau)w(\tau), \tag{57.9}$$

代入(56.10)，并建立关于 w 的方程，則得

$$\Psi_N\ddot{w}+2\dot{\Psi}_N\dot{w}+G(\tau)\Psi_N w=0, \tag{57.10}$$

$$G(\tau)=k^2-Q+\frac{\ddot{\Psi}_N}{\Psi_N}. \tag{57.11}$$

然而根据(57.3)～(57.6)，有

$$\begin{aligned}G(\tau)&=k^2-Q+\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2\\&=(ik)^{-N}\left[\ddot{\varphi}_N+\sum_{p=0}^{N}(ik)^{-p}\sum_{q=1}^{N+p-1}\dot{\varphi}_q\dot{\varphi}_{N+p-q}\right]\\&=O(k^{-N}),\end{aligned} \tag{57.12}$$

即 $G(\tau)$ 是具有上面估計的既知的有界連續函数。

以 Ψ_N 乘(57.10)，将它改写为

$$\frac{d}{d\tau}[\Psi_N^2\dot{w}]+\Psi_N^2Gw=0, \tag{57.13}$$

再由 s 至 τ_j 积分(設 $\dot{w}(\tau_j)=0$)，得

$$\Psi_N^2(s)\dot{w}(s)=\int_s^{\tau_j}\Psi_N^2(t)G(t)w(t)dt. \tag{57.14}$$

对此再积分一次，选取能使 $w(\tau_j)=1$ 成立的积分常数，交换积分順序后，則得

$$w(\tau)=1-\int_\tau^{\tau_j}[\Psi_N(s)]^{-2}ds\int_s^{\tau_j}\Psi_N^2(t)G(t)w(t)dt \tag{57.15}$$

$$=1-\int_\tau^{\tau_j}K(\tau,t)G(t)w(t)dt, \tag{57.16}$$

$$K(\tau,t)=\int_\tau^t\Psi_N^2(t)[\Psi_N(s)]^{-2}ds. \tag{57.17}$$

若 $|k|$ 充分大时，則 $|\Psi_N(\tau)|$ 为 $|\tau|$ 的单調函数，不論 τ_j 取 τ_0 或 τ_1 中的那一个，都有可能使 $|\Psi_N^2(t)/\Psi_N^2(s)|\leqq 1$，从而得到

$$|K(\tau,t)|\leqq|\tau_0-\tau_1|.$$

再参照(57.12)，并作与前章相同的討論，可将 $w(t)$ 确定为 Volterra 积分方程的解，对充分大的 k，有

$$w(\tau)=1+O(|k|^{-N}),$$

由(57.9)知道

$$\Psi=\Psi_N[1+O(|k|^{-N})] \tag{57.18}$$

成立。最后的式子表示 Ψ_N 是 Ψ 的渐近展开，相对誤差为 $O(k^{-N})$.

例 Bessel 函数的渐近展开(2)．在(55.10)中，設 $x=e^{\xi}$，则对 $w=C_k(ke^{\xi})$ 得

$$\frac{d^2}{d\xi^2}w+k^2(e^{2\xi}-1)w=0. \tag{57.19}$$

为了求出精确的值，用这种形式比(55.10)便利。为了与 §55 的結果比较，設

$$x=e^{\xi}=\sec\theta, \tag{57.20}$$

则得

$$d\xi=-d\log\cos\theta=\tan\theta\,d\theta. \tag{57.21}$$

$$P=e^{2\xi}-1=\tan^2\theta,\quad \tau=\int\tan\theta\,d\xi=\int\tan^2\theta\,d\theta=\tan\theta-\theta. \tag{57.22}$$

另外由(56.6)，得

$$Q=-P^{-\frac{3}{4}}\frac{d^2}{d\xi^2}(P^{-\frac{1}{4}})=-\frac{1}{\sqrt{\tan^3\theta}}\frac{1}{\tan\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{\tan\theta}\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{\tan\theta}}\right]$$

$$=-\frac{\cos^2\theta\left(\cos^2\theta+\frac{1}{4}\right)}{\sin^6\theta},$$

$$Q_1=\int Qd\tau=\int Q\tan^2\theta\,d\theta=\frac{5}{12}\cot^3\theta+\frac{1}{4}\cot\theta. \tag{57.23}$$

当 $\theta\to\frac{\pi}{2}$ 时，Q, Q_1 都趋于 0．代入(57.8)，令 $\theta\to\frac{\pi}{2}$，再与(55.19)比較，确定常数因子，则得(55.21)的精密形式

$$H_k^{1,2}(k\sec\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi k\tan\theta}}\exp\Big[\pm ik(\tan\theta-\theta)\mp\frac{\pi}{4}i\mp\frac{i}{2k}Q_1$$

$$+\frac{1}{4k^2}Q+O(k^{-3})\Big] \tag{57.24}$$

§58　$P(z)=a(z-z_0)^n$ 的情形

在 $P(z)$ 的零点的近傍，前章中的 Q，G 都成为无穷大，并且不可能用逐次近似的方法。又原方程(54.1)的解，当 $P(z)$ 为整函数且除去无穷远点没有其他的奇异点时，必然仍是整函数，所以漸近解象(54.3)，(54.6)那样，显然以轉移点为分歧点(注意$\sqrt{P}$)，卽当 $z-z_0$ 的幅角改变 2π 时(繞轉移点轉一周)，不会回到原来的值。从而，要解决(55.9)所表示的一解延拓到区域 $P<0$ 的問題时，只簡单地就(55.8)作替換 $\tau\to i\tau$ 是錯誤的。因为假若这样作是可以的話，则替換 $\tau\to -i|\tau|$ 也应該同样是允許的，但前者得 $Ae^{ik\tau}\to Ae^{-k|\tau|}$，而后者得$\to Ae^{k|\tau|}$，故产生完全相反的結果。那末究竟如何才能解决解在轉移点近傍的形狀，以及轉移点外漸近解的延拓問題呢？

为了解决这个問題，最好采用下面的方法：先考虑一种簡单的情形，卽对一个实际存在的轉移点，已知其精确解的情形。然后仿照这个解再考虑更复杂的情形(注意从(54.2)得到(54.3)的思想)。

最簡单的是 P 在 $z=z_0$ 处有 n 次零点

$$P(z)=a(z-z_0)^n \tag{58.1}$$

的情形。此时(54.1)可写成

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}+k^2a(z-z_0)^n\Phi=0. \tag{58.2}$$

利用(56.1)，(56.2)将变数换成

$$\Psi=P^{\frac{1}{4}}\Phi=a^{\frac{1}{4}}(z-z_0)^{\frac{n}{4}}\Phi,$$

$$\tau=\sqrt{a}\int_{z_0}^{z}(z-z_0)^{\frac{n}{2}}dz=\frac{2\sqrt{a}}{n+2}(z-z_0)^{\frac{(n+2)}{2}}, \tag{58.3}$$

则由(56.6)，有

$$P=a\left(\frac{n+2}{2\sqrt{a}}\tau\right)^{\frac{2n}{n+2}},$$

$$Q=P^{-\frac{1}{4}}\frac{d^2}{d\tau^2}P^{\frac{1}{4}}=\frac{n}{2(n+2)}\left[\frac{n}{2(n+2)}-1\right]\frac{1}{\tau^2}=-\frac{q}{\tau^2},$$

$$q=\frac{n(n+4)}{4(n+2)^2}. \tag{58.4}$$

将此代入(56.5)，結果(58.2)归結为

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Psi+\left(k^2+\frac{q}{\tau^2}\right)\Psi=0. \tag{58.5}$$

参照 (55.11)，(55.12)，则知(58.5)的解可利用圓柱函数 C_ν，表示次数为

$$\nu=\frac{1}{n+2} \tag{58.6}$$

的圓柱函数

$$\Psi\propto\sqrt{\tau}\,C_\nu(k\tau), \tag{58.7}$$

其中 ν 由

$$\nu^2=\frac{1}{4}-q=\frac{1}{(n+2)^2}$$

給出。又(58.2)的解是

$$\Phi\propto P^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\tau}\,C_\nu(k\tau)\propto\sqrt{z-z_0}\,C_\nu\left(2k\nu\sqrt{a}(z-z_0)^{\frac{(n+2)}{2}}\right),$$

$$\propto\tau^\nu C_\nu(k\tau). \tag{58.8}$$

再考虑到当 $\xi\to0$ 时，$C_\nu(\xi)$ 与 $\xi^{\pm\nu}$ 成比例，及(58.6)，则从(58.8)可知在 $z=z_0$ 的近傍 Φ 关于 z 是正則的。(58.8) 确为 z 的整函数。若取 Hankel 函数 $H_\nu^1(k\tau)$ 和 $H_\nu^2(k\tau)$ 作为 $C_\nu(k\tau)$，则

$$\Psi=\sqrt{\tau}\,[AH_\nu^1(k\tau)+BH_\nu^2(k\tau)], \tag{58.9}$$

至于 $|k\tau|\to\infty$ 时，$H_\nu(k\tau)$的漸近展开，当 $|\arg(k\tau)|<\pi$ 时，可由(55.19)，即

$$H_\nu^{1,2}(k\tau) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k\tau}} \exp\left[\pm i\left(k\tau - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$
$$|\arg(k\tau)| < \pi \tag{58.10}$$

給出。若 $k\tau$ 的幅角在上述的范围以外时（参照本丛书《特殊函数》），首先利用（适当选取 m）Hankel 函数的公式

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^1(e^{m\pi i}\zeta) &= -\frac{\sin(m-1)\nu\pi}{\sin\nu\pi} H_\nu^1(\zeta) \\ &\quad - e^{-\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi} H_\nu^2(\zeta), \\ H_\nu^2(e^{m\pi i}\zeta) &= e^{\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi} H_\nu^1(\zeta) \\ &\quad + \frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi} H_\nu^2(\zeta), \end{aligned}\right\} \tag{58.11}$$

再利用满足 $|\arg\zeta| < \pi$ 的 ζ 的 Hankel 函数表示它，然后重新利用(58.10)便可。

§ 59 轉移点近傍的解和延拓公式

1) 在轉移点 $z=z_0$ 的近傍，假定无其他的轉移点，則 $P(z)$ 近似于 $a(z-z_0)^n$. 若 τ 的积分下限取为 $z=z_0$，选取

$$\tau = \int_{z_0}^{z} P^{\frac{1}{2}} dz, \tag{59.1}$$

则根据前面的討論(54.1)或(56.5)，当 $\tau \sim 0$ 时的近似解为

$$\begin{aligned} \Phi \sim \tilde{\Phi} &= P^{-\frac{1}{4}}\tau^{\frac{1}{2}} C_\nu(k\tau) \\ &= P^{-\frac{1}{4}}\tau^{\frac{1}{2}}[A_1 H_\nu^1(k\tau) + B_1 H_\nu^2(k\tau)]. \end{aligned} \tag{59.2}$$

当 $\tau\to 0$ 时 P, τ 都近似于(58.1), (58.3). 但在这里把它們作为精确的值是有好处的（其优点在下面叙述）。当 $k\to\infty$ 时，即使 $|k\tau|$ 成为相当大（譬如 $k\tau = O(1)$），但是 τ 仍可能取为很小的。所以，对这种情形(59.2)将会給出好的近似。首先若 $|k\tau|\to\infty$，由(58.10)知(59.2)为

$$\Phi \sim \widetilde{\Phi} = \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\, P^{-\frac{1}{4}} \left[A_1 e^{i\left(k\tau - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + B_1 e^{-i\left(k\tau - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right],$$

$$\pi > |\arg(k\tau)|. \tag{59.3}$$

除了常数系数外，它与 (55.9) 完全一致。对于 $k\tau$ 的其他的幅角值，也有同样的結果。即当 k 很大，而沒有其他的轉移点时，(59.2) 在 z 的全区域給出有效的近似解（若再有别的轉移点或是 P 的奇异点时，則至少到那里为止是有效的）。

由近似解：$\widetilde{\Psi} = P^{1/4}\widetilde{\Phi}$ 所滿足的微分方程(58.5)，即

$$\frac{d^2\widetilde{\Psi}}{d\tau^2} + \left[k^2 - Q + \left(Q + \frac{q^2}{\tau^2} \right) \right] \widetilde{\Psi} = 0 \tag{59.4}$$

便可了解我們所取的近似解的近似程度。与 $k^2 - Q$ 相比，$Q + q/\tau^2$ 越小近似程度越好，但由于当 $\tau \to 0$ 时，Q 的危險項 $Q \sim -q/\tau^2$ 在 $Q + q/\tau^2$ 中被抵消，因此若对 τ 的所有的值成立 $|k^2 - Q| \gg |Q + q/\tau^2|$（除去 $k^2 = Q$ 的点，事实上，在那里 $Q + q/\tau^2$ 也必然是相当小），就能保証近似的有效性。

2) 若只是 k 非常大，那末使 $k\tau$ 非常小的 τ 的范圍就非常小了，这时若再引进 Bessel 函数是非常麻煩的，因此就沒有必要使用近似公式(59.2)了。现在考虑一种特殊情形，即 P 为 x 的实函数，k 为正实数的情形。解的大致形式由(55.9)与(55.9′)表示。现在的問題是：找出两者越过 $P=0$ 点时如何連系的关系。換句話說：两者作为同一函数的解析延拓时，A, B 与 A', B' 之間有什么关系？这是实际問題中出现的非常多，而且非常重要的情形。譬如，通过折射率不均匀的介质的波的反射率和透过率，通过势垒(potential 壁)的物质波的同样的問題，以及散射(scattering)的問題都属于此类，假若(55.8)，(55.9)中的近似程度可以滿足，則在轉移点处就不需要用更麻煩的函数了。

这样的关系式称为延拓公式。在导出它时，(59.2)当然要起

作用。即将此式在 $P>0$, $P<0$ 的情形下展开，并比較其系数即可。

为了簡单起見，設在 $x>0$ 时 $P>0$，并設 P 在原点的邻近，可以用 $ax^{2m+1}f^2(x)$（这里 $f(x)$ 为 $f(0)=1$ 的正則函数，a 为正实数，m 为整数）表示的情形。于是还有 $x<0$, $P<0$，它对于 $x>0$ 的漸近展开当然为(59.3)。

对于 $x<0$ 即 $x=|x|e^{\pi i}$，这时

$$\tau=\int_0^x P^{\frac{1}{2}}dx=a^{\frac{1}{2}}\int_0^{x\exp(\pi i)} x^{m+\frac{1}{2}}f(x)dx \tag{59.5}$$

的幅角为 $\left(m+\dfrac{3}{2}\right)\pi i$，而且

$$\tau=\exp\left[\left(m+\frac{3}{2}\right)\pi i\right]|\tau|. \tag{59.6}$$

又 P 为

$$P=|P|e^{(2m+1)\pi i}. \tag{59.7}$$

为了求出具有幅角为(59.6)的 H_ν^1, H_ν^2 的漸近展开，設在公式(58.11)内，$m\to m+1$, $\zeta\to i|\tau|\,[(i=\exp(\pi i/2)]$，則立即可得

$$H_\nu^1(k\tau)=H_\nu^1(e^{(m+1)\pi i}\cdot ik|\tau|)=-\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^1(ik|\tau|)$$

$$-e^{-\nu\pi i}\frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^2(ik|\tau|),$$

$$H_\nu^2(k\tau)=e^{\nu\pi i}\frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^1(ik|\tau|)$$

$$+\frac{\sin(m+2)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^2(ik|\tau|). \tag{59.8}$$

于(58.6)令 $n=2m+1$，則 ν 为

$$\nu=\frac{1}{2m+3}, \tag{59.9}$$

从而成立着下列的关系式：

$$\sin(m+1)\nu\pi=\sin[\pi-(m+1)\nu\pi]=\sin(m+2)\nu\pi. \tag{59.10}$$

由于 $\arg[ik|\tau|]<\pi$，根据(58.10)，对于 $k|\tau|\to\infty$ 时，(59.8)的右边的主項具有下列的漸近展开式：

$$H_\nu^1(k\tau)\sim-\sqrt{\frac{2}{\pi k|\tau|}}\frac{1}{\sin\nu\pi}\Big[\sin m\nu\pi\cdot e^{-k|\tau|-i\left(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$+\sin(m+1)\nu\pi\cdot e^{k|\tau|-i\left(\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\Big]e^{-\frac{\pi}{4}i},\qquad(59.11)$$

$$H_\nu^2(k\tau)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi k|\tau|}}\frac{1}{\sin\nu\pi}\Big[\sin(m+1)\nu\pi\cdot e^{-k|\tau|+i\left(\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$+\sin(m+1)\nu\pi\cdot e^{k|\tau|+i\left(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\Big]e^{-\frac{\pi}{4}i},\qquad(59.12)$$

$$\arg(k\tau)=\left(m+\frac{3}{2}\right)\pi i.$$

$P<0$ 时，由(59.6)，(59.7)有

$$P^{-\frac{1}{4}}\tau^{\frac{1}{2}}=|P|^{-\frac{1}{4}}|\tau|^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right),\qquad(59.13)$$

所以(59.2)于 $P<0$ 时的漸近展开为

$$\Phi\sim|P|^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\frac{1}{\sin\nu\pi}\left[A_1'e^{k|\tau|}+B_1'e^{-k|\tau|}\right],\qquad(59.14)$$

$$A_1'=-iA_1\sin(m+1)\nu\pi e^{-\frac{\nu}{2}\pi i}+iB_1\sin(m+1)\nu\pi e^{\frac{\nu}{2}\pi i},\qquad(59.15)$$

$$B_1'=-A_1\sin m\nu\pi e^{-\frac{\nu}{2}\pi i}+B_1\sin(m+1)\nu\pi e^{\frac{\nu}{2}\pi i}.\qquad(59.16)$$

(59.3)，(59.14) 都是 (59.2) 在 $P>0$, $P<0$ 时的展开式，(59.15)，(59.16)为所期望的延拓关系。今将此式改为更簡单的(55.9)，(55.9′) 的 A, B; A', B' 之間的关系。比較 (55.8) 与(59.3)，(55.9)与(59.14)，則得到关系

$$A=\sqrt{\frac{2}{\pi k}}A_1e^{-\left(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)i},\quad B=\sqrt{\frac{2}{\pi k}}B_1e^{\left(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}i\right)},$$

$$\frac{A'}{A_1'}=\frac{B'}{B_1'}=\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\frac{1}{\sin\nu\pi}. \tag{59.17}$$

据此从(59.15)，(59.16)消去 A_1, B_1, A_1', B_1'，则得

$$A'=\frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi}\left(e^{-\frac{\pi}{4}i}A+e^{\frac{\pi}{4}i}B\right), \tag{59.18}$$

$$B'=\frac{1}{\sin\nu\pi}\left(-\sin m\nu\pi\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}A+\sin(m+1)\nu\pi\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}B\right). \tag{59.19}$$

这就是

$$P^{-\frac{1}{4}}\left[Ae^{ik|\tau|}+Be^{-ik|\tau|}\right] \tag{59.20}$$

与

$$|P|^{-\frac{1}{4}}\left[A'e^{k|\tau|}+B'e^{-k|\tau|}\right] \tag{59.21}$$

的延拓公式。

但在使用这公式时，必须注意的是：若(59.21)的项 $B'e^{-k|\tau|}$ 与以 A' 为系数的项(以 $e^{k|\tau|}$ 为主项)的误差相比甚小时，则 $A'\neq0$ 的限定将失去意义。

（i） $A'\neq0$ 时，令 $\varepsilon\neq0$，选取

$$A=\exp\left(\varepsilon-\frac{\pi}{4}\right)i,\quad B=\exp\left(-\varepsilon+\frac{\pi}{4}\right)i,$$

忽视 $e^{-k|\tau|}$ 项，则从(59.18)～(59.19)，有

$$P^{-\frac{1}{4}}\cos\left(k|\tau|-\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\to\frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi}\sin\varepsilon|P|^{-\frac{1}{4}}e^{k|\tau|},\ \varepsilon\neq0,$$

$$\nu=1/(2m+3). \tag{59.22}$$

（ii） $A'=0$ 时，选取

$$A=\exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right),\quad B=\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right),$$

则 B' 为

$$B'=\frac{1}{\sin\nu\pi}\left[\sin(m+1)\nu\pi-\sin m\nu\pi\right]=\frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\nu\pi}{\cos\frac{\nu}{2}\pi}, \tag{59.23}$$

得

$$|P|^{-\frac{1}{4}}e^{-k|\tau|}\to\frac{2\cos\frac{\nu}{2}\pi}{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\nu\pi}P^{-\frac{1}{4}}\cos\left(k|\tau|-\frac{\pi}{4}\right).\quad(59.24)$$

以(i)，(ii)为延拓公式的标准形是最方便的。这里的"→"表示这样的意义，即它的左边越过了近似函数的轉移点时的延拓，近似于它的右边。由上述的注意，显然可知"→"的方向是不可逆的。即若将"→"的方向顛倒过来，则把(59.22)右边所忽視的 $B'e^{-k|\tau|}$ 的 B' 改变一下时，左边的位相可任意地变化，又若将(59.24)右边的位相作微小的变化时，左边可能出現与 $e^{k|\tau|}$ 成比例的項。

在应用上特别重要的是一級轉移点的情形，此时，若 $m=0$，$\nu=1/3$，则(59.22)，(59.23)为

$$P^{-\frac{1}{4}}\cos\left(k|\tau|-\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\to\sin\varepsilon|P|^{-\frac{1}{4}}e^{k|\tau|},\quad\varepsilon\neq0,\quad(59.25)$$

$$|P|^{-\frac{1}{4}}e^{-k|\tau|}\to2P^{-\frac{1}{4}}\cos\left(k|\tau|-\frac{\pi}{4}\right).\qquad(59.26)$$

上述的公式是先假設了 $x>0$，$P>0$ 而后导出的，但是，若以(59.1)定义 τ，则所得的公式可看成 $P>0$ 的区域($\arg P=0$)，和 $P<0$ 时 $\arg P=(2m+1)\pi i$（参照(59.7)）的結合公式。因此在这里以 $|\tau|$ 表示了 τ，$|\tau|$ 是距轉移点的距离。从而这公式在 $x>0$，$P<0$；$x<0$，$P>0$；或者轉移点为 $x=x_0\neq0$ 的情形下都有效。

3) 由 2) 知当 $x=0$ 时，P 为 0，現在考慮，在其两側同是正实数或是負实数的情况。即在原点的近傍

$$P\doteq ax^{2m}f(x)\qquad(59.27)$$

的情形。此时解的型虽然沒有变化，但是位相和振幅有变化。首先設 $a>0$。与 2) 相同，当 $x>0$；P，$\tau>0$，即 $P=|P|$，$\tau=|\tau|$；当 $x<0$，有

$$P=|P|e^{2m\pi i},\quad \tau=e^{(n+1)\pi i}|\tau|,\tag{59.28}$$

若在(58.11)中，令 $m\to m+1$，$\zeta=k|\tau|$，再考虑(59.28)对 $k\tau$ 有 $(m+1)\nu=1/2$，则有

$$H_\nu^1(k\tau)=-\frac{1}{\sin\nu\pi}[\sin m\nu\pi\, H_\nu^1(k|\tau|)+e^{-\nu\pi i}H_\nu^2(k|\tau|)],\tag{59.29}$$

$$H_\nu^2(k\tau)=\frac{1}{\sin\nu\pi}[e^{\nu\pi i}H_\nu^1(k|\tau|)+\sin m\nu\pi\cdot H_\nu^2(k|\tau|)],\tag{59.30}$$

$$\nu=\frac{1}{2m+2},\quad \sin m\nu\pi=\sin(m+2)\nu\pi.$$

考虑 $P^{-1/4}\tau^{1/2}=i|P|^{-1/4}|\tau|^{1/2}$，若取当 $k\tau\to\infty$ 时，(59.29)，(59.30)的展开的主项，则容易得出(59.2)当 $x<0$ 时的展开式的主项，即

$$\Phi\sim|P|^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\frac{1}{\sin\nu\pi}[A_1'e^{i\left(k|\tau|-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+B_1'e^{-i\left(k|\tau|-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}],\tag{59.31}$$

$$A_1'=-iA_1\sin m\nu\pi+iB_1e^{\nu\pi i},\tag{59.32}$$

$$B_1'=-iA_1e^{-\nu\pi i}+iB_1\sin m\nu\pi.\tag{59.33}$$

若取与(59.20)相应的形状，并参照(59.3)，则有

$$|P|^{-\frac{1}{4}}[Ae^{ik|\tau|}+Be^{-ik|\tau|}]\rightleftarrows|P|^{-\frac{1}{4}}[A'e^{ik|\tau|}+B'e^{-ik|\tau|}],\tag{59.34}$$

$$A'=\frac{1}{\sin\nu\pi}[-i\cos\nu\pi A+B],\qquad B'=\frac{1}{\sin\nu\pi}[A+i\cos\nu\pi\cdot B].\tag{59.35}$$

将此就 A, B 解之，则得 A 与 A', B 与 B' 交换了的式子，两者的关系完全是对称的。

$a<0$ 时，成立着在(59.34)中，将 k 形式的换成 ik 的关系式。設 $B=0$, $A=1$，若将右边的 $A'\exp(-k|\tau|)$ 项与 $B'\exp(k|\tau|)$

相比而忽视之，则得与(59.24)相仿的关系式：

$$|P|^{-\frac{1}{4}}e^{-k|\tau|}\to\frac{1}{\sin\nu\pi}\ |P|^{-\frac{1}{4}}e^{k|\tau|}. \tag{59.36}$$

关于"→"的注意与(59.24)时相同。

§ 60 延拓公式的应用

1) 现在研究粒子波从左面通过如图的势垒的問題。根据(54.9)可写出

$$\frac{2M}{\hbar^2}=k^2,\ E-V(x)=P(x). \tag{60.1}$$

轉移点在 $E=V$ 的地方，在图里为 x_1, x_2. 今假設势是平稳的，并 x_1 与 x_2 离得相当远 $[k(x_1-x_2)\gg 1]$. 区域由 x_1, x_2 分成三部分，Ψ 在 $x_1<x<x_2$ 中为指数型，在 $x>x_2$, $x<x_1$ 内为波动型。x_1, x_2 为 P 的一級零点。在各区域中，Ψ 的形状各为

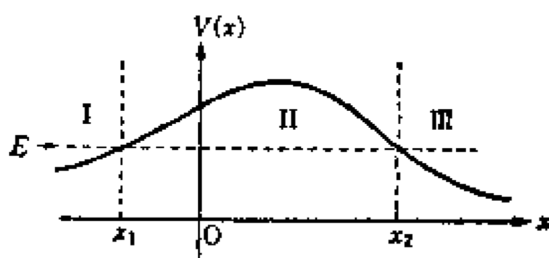


图 60.1

$$\Psi_1=P^{-\frac{1}{4}}[A_1e^{ik|\tau_1|}+B_1e^{-ik|\tau_1|}],\quad x<x_1, \tag{60.2}$$

$$\Psi_2=|P|^{-\frac{1}{4}}[A_1'e^{k|\tau_1|}+B_1'e^{-k|\tau_1|}]=|P|^{-\frac{1}{4}}[A_2'e^{k|\tau_2|}+B_2'e^{-k|\tau_2|}],$$
$$x_1<x<x_2, \tag{60.3}$$

$$\Psi_3=P^{-\frac{1}{4}}[A_2e^{ik|\tau_2|}+B_2e^{-ik|\tau_2|}],\quad x_2<x. \tag{60.4}$$

若以 x_1, x_2 为基准，τ_1, τ_2 可以表示成为

$$\tau_1=\int_{x_1}^{x}P^{\frac{1}{2}}dx,\quad \tau_2=\int_{x_2}^{x}P^{\frac{1}{2}}dx. \tag{60.5}$$

一方面联系着三个区域的延拓公式为(59.18)，(59.19)，若設 $m=0$，则

$$A_j' = A_j e^{-\frac{\pi}{4}i} + B_j e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad B_j' = B_j e^{-\frac{\pi}{4}i}, \quad j=1, 2. \tag{60.6}$$

于 $x<x_1$, $|\tau_1|$ 为 x 的减函数(当 x 趋近于 x_1 时,则减少)。把 x 增加时位相同时增加的波,作为右进的进行波来考虑,则从左侧入射的进行波为 Ψ_1 中的 $P^{-\frac{1}{4}}B_1e^{-ik|\tau_1|}$. 另一方面,对于通过势垒的 $x_2<x$, $|\tau_2|$ 与 x 同时增加,故此,这里仅不存在向右进行的波,从而在 Ψ_3 中有 $B_2=0$. 計算透过率归結为已知 B_1, 而求 A_2 (即 A_2/B_1), 但为了满足条件 $B_2=0$, 首先令

$$A_2 = e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad B_2 = 0 \tag{60.7}$$

而决定 B_1. (因問題在于两个数的比,所以这里的假定并不失一般性.)把这个式子代入(60.6),则(60.3)的 A_2', B_2' 分别为

$$A_2' = 1, \quad B_2' = 0. \tag{60.8}$$

另外,由(60.5),对于 $x_1<x<x_2$, 有

$$|\tau_1| + |\tau_2| = |\tau_{12}| = \left|\int_{x_1}^{x_2} P^{\frac{1}{2}}dx\right| = \text{常数}, \tag{60.9}$$

在(60.3)中,比較指数,得

$$A_1' = 0, \quad B_1' = e^{k|\tau_{12}|}. \tag{60.10}$$

再将此式代入(60.6),就得到联立方程:

$$0 = A_1 e^{-\frac{\pi}{4}i} + B_1 e^{\frac{\pi}{4}i}, \tag{60.11}$$

$$e^{k|\tau_{12}|} = B_1 e^{-\frac{\pi}{4}i}. \tag{60.12}$$

若就 B_1, A_1 解之,得

$$B_1 = e^{k|\tau_{12}|+\frac{\pi}{4}i}, \quad A_1 = e^{k|\tau_{12}|-\frac{\pi}{4}i}. \tag{60.13}$$

在(60.2)中,含 A_1 的項給出了当 $x<x_1$ 时的反射波。

考虑 $V(\infty)=V(-\infty)=0$, $P(\infty)=P(-\infty)=E$, 则由(60.13), (60.7) 知道波的透过率 T (振幅的絕对值的二次方的比)为

$$T=\frac{|A_2|^2}{|B_1|^2}=e^{-2k|\tau_{12}|}. \tag{60.14}$$

根据(60.13)，反射率 $R=|A_1|^2/|B_1|^2$ 则为 1，但实际上，由于能量守恒律应該有

$$R=1-T=1-e^{-2k|\tau_{12}|}. \tag{60.15}$$

因为我們的近似是假定了 $k|\tau_{12}|\gg 1$，所以 $\exp(-2k|\tau_{12}|)$ 与 1 相比而被省略，这从近似的性质来看是当然的事。

2) 現在研究假定 1) 不成立的特殊情况，即 $\tau_{12}=0$，x_1 与 x_2 一致的情况。这时 V 的最大値等于 E，P 于 $x=x_0$ 处有 2 級零点。$x<x_0$，$x>x_0$ 处的 Ψ 都为波动型，若把 τ 定义为

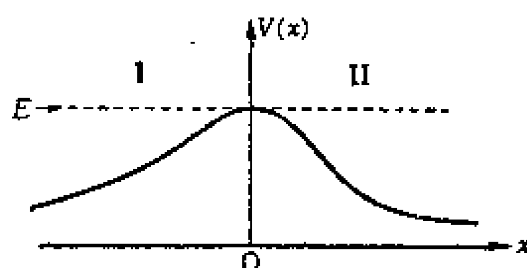


图 60.2

$$\tau=\int_{x_0}^{x}P^{\frac{1}{2}}dx, \tag{60.16}$$

则 (59.34) 的右边和左边分别給出于 $x<x_0$，$x>x_0$ 范圍内的 Ψ. 于(59.35)内，令 $m=1$，$\nu=1/4$，则延拓公式为

$$A'=-iA+\sqrt{2}B, \tag{60.17}$$

$$B'=\sqrt{2}A+iB. \tag{60.18}$$

現在考慮波 $B'\exp(-ik|\tau|)$ 由左边入射的情况。由于对 $x_0<x$，透过波 $A\exp(ik|\tau|)$不存在，所以可令 $B=0$，則得

$$A'=-iA,\quad B'=\sqrt{2}A. \tag{60.19}$$

所以，透过率 T 及反射率分别为

$$T=\frac{|A|^2}{|B'|^2}=\frac{1}{2},\quad R=\frac{|A'|^2}{|B'|^2}=\frac{1}{2}, \tag{60.20}$$

两者相等其和为 1. 这个結果与 (60.14)，(60.15) 成为很好的对照。

另外，若 x_0 为 $2m$ 位的零点时，于 (59.34)，(59.35) 中令

$B=0$, 则有

$$A'=\frac{-i\sin\left(\frac{m\pi}{2m+2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2m+2}\right)}A,\quad B'=\frac{A}{\sin\left(\frac{\pi}{2m+2}\right)}. \tag{60.21}$$

因为

$$\begin{aligned}T&=\sin^2\left(\frac{\pi}{2m+2}\right),\\ R&=\sin^2\left(\frac{m\pi}{2m+2}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{2m+2}\right),\end{aligned} \tag{60.22}$$

所以 T 及 R 具有这样的性质:即 $T+R=1$, $T\leq R$. 由于,随着 m 的增大,透过率减小,也就是极大值逐渐平坦,垒增厚了,故 T, R 有这种性质似乎是当然的事情。

§ 61　在轉移点近傍近似的精密化(1)

1) 把(56.5)写成

$$\tilde{L}[\Psi]=\frac{d^2\Psi}{d\tau^2}+(k^2-\tilde{Q})\Psi=(Q-\tilde{Q})\Psi. \tag{61.1}$$

利用满足

$$\tilde{L}[K(\tau,t)]=0,\ K(t,t)=0,\ \left[\frac{\partial}{\partial\tau}K(\tau,t)\right]_{\tau=t}=1 \tag{61.2}$$

的 $K(\tau,t)$, 把(61.1)改写成为积分方程的形式,则得到

$$\Psi(\tau)=\tilde{\Psi}(\tau)+\int^{\tau}K(\tau,t)\{Q(t)-\tilde{Q}(t)\}\Psi(t)dt. \tag{61.3}$$

这里的 $\tilde{\Psi}(\tau)$ 是

$$\tilde{L}[\tilde{\Psi}]=\frac{d^2\tilde{\Psi}}{d\tau^2}+(k^2-\tilde{Q})\tilde{\Psi}=0 \tag{61.4}$$

的解。如巳叙述过那样,在 § 56 以前,把 $\tilde{Q}$ 取为 0;在 § 59 中,把 $\tilde{Q}$ 取为 $-q/\tau^2$, 那时 $\tilde{\Psi}$ 作为渐近展开的主项。若与 $|k^2-Q|$ 相比, $|Q-\tilde{Q}|$ 越小时,近似程度就越好。为了使 § 59 的近似进一步精密

化，已有很多人进行过努力（参照卷末文献[39]～[44]）。

2）前面已經叙述过，Q 在轉移点近傍的近似为 $-q/\tau^2$，現在来考察一下它的近似程度。选 z 面的原点为轉移点，在它的近傍作 Taylor 展开

$$P(z)=az^n(1+b_1z+b_2z^2+\cdots),\quad a\neq 0, \tag{61.5}$$

再代入(56.2)，則有

$$\tau=\frac{2}{n+2}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{n+2}{2}}\left[1+\frac{n+2}{2(n+4)}b_1z\right.$$
$$\left.+\frac{n+2}{n+6}\left(\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{8}b_1^2\right)z^2+\cdots\right], \tag{61.6}$$

就 z 解此式，得到

$$z=t\left[1-\frac{b_1}{n+4}t-\frac{1}{n+6}\left\{b_2-\frac{n^2+11n+32}{2(n+4)^2}b_1^2\right\}t^2-\cdots\right], \tag{61.7}$$

但是

$$t=\left[\frac{\tau}{2\nu\sqrt{a}}\right]^{2\nu},\quad \nu=\frac{1}{n+2}. \tag{61.8}$$

把(61.5)～(61.8)代入(56.6)求 Q，則有

$$Q=-\frac{n(n+4)}{16az^{n+2}}\left[1-\frac{n+2}{n+4}b_1z\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{n^2+5}{n(n+4)}b_1^2-\frac{n^2+8}{n(n+4)}b_2\right\}z^2+\cdots\right]$$
$$=-\frac{1}{\tau^2}[q_0+q_2\tau^{4\nu}+O(\tau^{6\nu})], \tag{61.9}$$

但是

$$q_0=\frac{n(n+4)}{4(n+2)^2},$$

$$q_2=6\left(\frac{n+2}{2\sqrt{a}}\right)^{\frac{4}{n+2}}\cdot\frac{1}{(n+2)^2(n+6)}\left[\frac{n+5}{n+4}b_1^2-2b_2\right]. \tag{61.10}$$

若令 $k\tau=\xi$，則(61.9)可写为

$$Q=-\frac{k^2}{\xi^2}\left[q_0+q_2\frac{\xi^{4\nu}}{k^{4\nu}}+O\left(\frac{\xi^{6\nu}}{k^{6\nu}}\right)+\cdots\right]. \tag{61.9'}$$

必須注意的是：这里缺少了与 $\tau^{2\nu}$（即 $k^{-2\nu}$）成比例的项。这件事情表示着，当 $k\tau=\xi=O(1)$，$k\gg1$ 时，令 $Q=-q_0/\tau^2=-k^2q_0/\xi^2$，则有非常良好的近似。若选 $-q_0/\tau^2$ 为 $\widetilde{Q}$ 时，則(61.2)的 $K(\tau,t)$ 取为

$$K(\tau,t)=-\frac{\pi i}{4}(\tau t)^{\frac{1}{2}}[H_\nu^1(k\tau)H_\nu^2(kt)-H_\nu^1(kt)H_\nu^2(k\tau)] \tag{61.11}$$

便可。利用这个結果，对于 $k\tau\sim1$，$k\gg1$，則(61.3)可写为

$$\Psi(\xi)=\xi^{\frac{1}{2}}C_\nu(\xi)+\frac{\pi iq_2}{4}k^{-4\nu}\xi^{\frac{1}{2}}\int^{\xi}[H_\nu^1(\xi)H_\nu^2(\eta)-H_\nu^2(\xi)H_\nu^1(\eta)]\eta^{4\nu-\frac{3}{2}}[1+O(k^{-2\nu})]\Psi(\eta)d\eta, \tag{61.12}$$

但

$$\xi=k\tau,\ \eta=kt,\ \widetilde{\Psi}(\xi)=\xi^{1/2}C_\nu(\xi).$$

由此以 $\widetilde{\Psi}(\xi)$ 为出发点，并且作与 §56，§57 中同样的逐次近似法，可以証明

$$\Psi(\xi)=\xi^{1/2}C_\nu(\xi)[1+O(k^{-4\nu})],\quad \xi=k\tau=O(1). \tag{61.13}$$

証明从略。比(61.13)更精密的近似，为以 $\eta^{1/2}C_\nu(\eta)$ 置换(61.12)右边的 Ψ，便有

$$\Psi=\left\{\xi^{1/2}C_\nu(\xi)+\frac{\pi i}{4}k^{-4\nu}\xi^{\frac{1}{2}}\int^{\xi}\eta^{4\nu-1}[H_\nu^1(\xi)H_\nu^2(\eta)-H_\nu^2(\xi)H_\nu^1(\eta)]C_\nu(\eta)d\eta\right\}\cdot[1+O(k^{-6\nu})]. \tag{61.14}$$

特别当 $n=1$，$\nu=1/3$ 时，使用关于任意的圓柱函数 C_p，$\bar{C}_q$ 的积的积分公式

$$\int^{\xi}\eta^{-p-q-1}\bar{C}_{p+1}(\eta)C_{q+1}(\eta)d\eta=-\frac{\xi^{-p-q}}{2(p+q+1)}\{\bar{C}_p(\xi)C_q(\xi)+\bar{C}_{p+1}(\xi)C_{q+1}(\xi)\} \tag{61.15}$$

中 $p=q=-\frac{2}{3}$ 时的結果,便可得到

$$\Psi\sim\xi^{1/2}C_{1/3}(\xi)+\frac{3q_2}{2}k^{-4/3}\xi^{5/6}C_{-2/3}(\xi)+O(k^{-2}),\quad \xi=O(1). \tag{61.16}$$

在这里,我們还使用了公式

$$H^1_{p+1}(\xi)H^2_p(\xi)-H^2_{p+1}(\xi)H^1_p(\xi)=-\frac{4i}{\pi\xi}. \tag{61.17}$$

3) $n=1$ 时的精确公式 如在上面讲的,对一級的轉移点公式最为简单,这种情形在实用上也是最重要的。有許多著者求得了种种比(61.16)更精确的公式。

例如,把(61.16)再一次代入(61.14)的右边,增高近似,則得到

$$\Psi\sim\xi^{1/2}C_{1/3}(\xi)+\frac{3q_2}{2}k^{-4/3}\xi^{5/6}C_{-2/3}(\xi)-\frac{q_3}{2k^2}\xi^{3/2}C_{4/3}(\xi)+O(k^{-8/3}). \tag{61.18}$$

这是 Pekeris 求得的公式[41].

与这些相比可以得到更精确的,并且形式还要简洁的公式(今井,1947)[42],[43]. 首先,令

$$\widetilde{\Psi}=\tau^{1/6}u^{1/2}C_{1/3}(\varkappa u^{3/2}), \tag{61.19}$$

这里

$$u=\tau^{2/3}+q_2\varkappa^{-2},\quad \varkappa^2=k^2+q_3. \tag{61.20}$$

象根据直接微分所証明的那样,$\widetilde{\Psi}$ 严格地满足方程

$$\frac{d^2\widetilde{\Psi}}{d\tau^2}+\left(k^2+\frac{5}{36}\frac{1}{\tau^2}+q_2\tau^{-2/3}+q_3\right)\widetilde{\Psi}=0. \tag{61.21}$$

从而,对于 $\xi\sim O(1)$,与(61.18)具有相同的近似程度。(作为 $\widetilde{Q}$ 可在(61.9)中,取到 $q_3\tau^{6\nu}$.)这里的 $q_2, q_3, \cdots, q_m$ 为(61.9)中 $\tau^{2m\nu}=\tau^{2m/3}$ 的系数,即在(61.10)中,令 $n=1$ 而得到的,它們为

$$q_0=5/36,\quad q_2=-\frac{3}{35}\left(\frac{3}{2}a\right)^{-\frac{2}{3}}(5b_2-3b_1^2),\tag{61.22}$$

$$q_3=-\frac{4}{75}\frac{1}{a}(25b_3-35b_1b_2+14b_1^3),\tag{61.23}$$

$$q_4=-\frac{27}{26950}\left(\frac{3}{2}a\right)^{-\frac{4}{3}}(6125b_4-4350b_2^2$$

$$-9800b_1b_3+12080b_1^2b_2-3624b_1^4).\tag{61.24}$$

若取(61.19)为$\widetilde{\Psi}$,则在积分方程(61.3)中,$K(\tau,\ t)$, $Q(t)-\widetilde{Q}(t)$分别表示为

$$K(\tau,\ t)=-\frac{\pi i}{4}(\tau t)^{1/6}(uu_1)^{1/2}[H^1_{1/3}(\varkappa u^{3/2})H^2_{1/3}(\varkappa u_1^{3/2})$$

$$-H^1_{1/3}(\varkappa u_1^{3/2})H^2_{1/3}(\varkappa u^{3/2})],\tag{61.25}$$

$$Q(t)-\widetilde{Q}(t)=-q_4t^{2/3}+O(t^{4/3}).\tag{61.26}$$

取 Hankel 函数 $H^1_{1/3}$, $H^2_{1/3}$ 为(61.19)的 $C_{1/3}$, 将此代入积分中的Ψ, 化简变形后便得更精确的近似:

$$\widetilde{\Psi}_{1,2}=\left(\frac{\pi k}{2}\right)^{1/2}i^{\pm5/6}\tau^{1/6}\zeta H^{1,2}_{1/3}(\varkappa\theta)+O(k^{-3}),\ \tau=O(k^{-1}),\tag{61.27}$$

$$\zeta=\left(u-\frac{1}{5}q_4\varkappa^{-2}u^2\right)^{1/2},$$

$$\theta=\left(u+\frac{1}{5}q_4\varkappa^{-2}u^2\right)^{3/2}.$$

但在此式中,为了使它在$k\tau\gg1$时,能成为(57.8)的延拓,而乘上了常数系数。Q_1的积分常数可这样选择:即当$\tau\to0$时常数項将消失。

§62 精 密 化 (績)

1) $n=2$, 从而 $\nu=1/4$ 的情况, 同样可得非常簡单的精确的公式。这个事实, 可以从由(61.9), (61.14)想象出来。現在我們

象(61.22)那样，取由(61.9)，(61.10)所得的

$$\widetilde{Q}=-\frac{3}{16}\frac{1}{\tau^2}-\frac{q_2}{\tau},\quad q_2=\frac{1}{64\sqrt{a}}(7b_1^2-12b_2) \tag{62.1}$$

作为$\widetilde{Q}$，試求其更好的近似。这时誤差$Q-\widetilde{Q}$的主項是$-q_3/\tau^{3/2}$。此时(61.4)可写为

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\widetilde{\Psi}+\left(k^2+\frac{3}{16}\frac{1}{\tau^2}+\frac{q_2}{\tau}\right)\widetilde{\Psi}=0, \tag{62.2}$$

但这是合流型超几何函数的一个标准形（参照《特殊函数》中的Whittaker方程），若使用Whittaker函数，把A, B作为常数，則其解可表示为

$$\widetilde{\Psi}=AW_{-\varkappa,1/4}(-2ik\tau)+BW_{\varkappa,1/4}(2ik\tau), \tag{62.3}$$

但是这里

$$\varkappa=-iq_2/(2k). \tag{62.4}$$

若令$q_2=0$（或者，使$k\tau\sim1$, $k\to\infty$），因为有着关系

$$W_{0,1/4}(z)=\frac{i}{2}e^{\frac{\pi}{8}i}\sqrt{\pi z}H^1_{1/4}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}z\right), \tag{62.5}$$

所以消去常数后，(62.3)与(58.9)便是等价的。

另外，对$|k\tau|\gg1$，使用当$|\arg k\tau|<\pi$时的$W_{\varkappa,\mu}$的漸近展开

$$W_{\varkappa,\mu}(z)\sim e^{-z/2}z^{\varkappa},\quad |\arg z|<\pi,\ |z|\gg1, \tag{62.6}$$

可以得到

$$\widetilde{\Psi}\sim Ae^{ik\tau}(-2ik\tau)^{iq_2/(2k)}\left(1+\frac{3}{32ik\tau}\right)$$
$$+Be^{-ik\tau}(2ik\tau)^{-iq_2/(2k)}\left(1-\frac{3}{32ik\tau}\right). \tag{62.7}$$

考慮

$$\int^{\tau}\widetilde{Q}d\tau=\frac{3}{16}\frac{1}{\tau}-q_2\log\tau, \tag{62.8}$$

比較(57.8)和(62.7)，則知两者恰好相互为解析延拓。

2) **轉移点接近时** 在轉移点接近的情况下,象結合公式那样的方法就不能使用了。关于两个轉移点($\pm z_0$)相当接近,$P(z)$ 在 $z\sim z_0$($|kz_0|\lesssim 1$)的附近能写成

$$P(z)=a(z^2-z_0^2)$$

的情形,目前正在研究,但是属于稍为专門的范圍,对此有兴趣的讀者,可参閱 R. Mckelvey: Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 103 等有关資料。

§63 偏微分方程

1) 现在研究一下,相当于 (54.1) 的 3 維的 Schrödinger 方程:

$$[\Delta+k^2P(x, y, z)]\Phi=0, \tag{63.1}$$

这里

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

并且假設当 k 增大时 P 沒有什么变动。

相当于(54.3),假定

$$\Phi=\exp[ik\varphi(x, y, z)], \tag{63.2}$$

再代入(63.1),則关于 φ 得到

$$-k^2(\operatorname{grad}\varphi)^2+ik\Delta\varphi+k^2P=0 \tag{63.3}$$

作为第 0 近似。忽視了第 2 項,則有

$$(\operatorname{grad}\varphi_0)^2=P. \tag{63.4}$$

用波的問題来說,k^2P 就是介质的折射率 $n(x, y, z)$ 的 2 乘方,$k\varphi_0$ 表示 Hamilton 的特性函数 (也叫做 eikonal❶, 参照本丛书《力学系与映射理論》 p. 14❷)。

另外,Schrödinger 方程可写作

❶ 1895 年 E. H. Bruns 提出的几何光学中的重要函数。——譯者注

❷ 中譯本亦是第 14 頁。——譯者注

$$k^2P=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)=\frac{2m}{\hbar^2}W. \tag{63.5}$$

(63.5)就是质点力学中的 Hamilton-Jacobi 方程。

(63.4)也可称为(63.3)的几何光学的近似。另外，垂直于 φ_0 为定数的面(波面)的綫，就是光綫的进路。以下为了簡单起見，不限于波的問題，只要 φ_0 为定数的面，統称它为波面。

为了求更高的近似，把(55.1)的展开式代入(63.3)，并順次的解(55.2)～(55.4)的递推公式

$$(\text{grad}\ \varphi_0)^2=P, \tag{63.6}$$

$$2(\text{grad}\ \varphi_0\cdot\text{grad}\ \varphi_1)=i\Delta\varphi_0, \tag{63.7}$$

$$2(\text{grad}\ \varphi_0\cdot\text{grad}\ \varphi_2)=i\Delta\varphi_1-(\text{grad}\ \varphi_1)^2, \tag{63.8}$$

………………………………………………

$$2(\text{grad}\ \varphi_0\cdot\text{grad}\ \varphi_n)=i\Delta\varphi_{n-1}-\sum_{m=1}^{n-1}(\text{grad}\ \varphi_m\cdot\text{grad}\ \varphi_{n-m}) \tag{63.8'}$$

卽可。

同样的，也可以假設

$$\Phi=e^{ik\varphi_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(x,\ y,\ z)}{(ik)^{n-1}}. \tag{63.9}$$

代入(63.1)，使 k 同次幂的項相等，則得到

$$(\text{grad}\ \varphi_0)^2=P, \tag{63.10}$$

$$2(\text{grad}\ \varphi_0\cdot\text{grad}\ \psi_1)+(\Delta\varphi_0)\psi_1=0, \tag{63.11}$$

………………………………………………

$$2(\text{grad}\ \varphi_0\cdot\text{grad}\ \psi_n)+(\Delta\varphi_0)\psi_n=-\Delta\psi_{n-1},\quad n>1. \tag{63.12}$$

因为这种写法可以使高次近似的方程具有簡单的、統一的形状，故此是很便利的。

求几何光学的波面，卽求 φ_0 的函数是几何光学的問題，在别的項目中可能已有論述，故今作为已知。考慮(63.6)，則知射綫方向的单位向量 N 是

$$N=\pm\operatorname{grad}\varphi_0/|\operatorname{grad}\varphi_0|=\pm P^{-1/2}\operatorname{grad}\varphi_0. \tag{63.13}$$

若沿射綫方向取长度 s，则能将 x, y, z 的任意函数 $f(x, y, z)$ 沿射綫方向的微分写成

$$\frac{\partial f}{\partial s}=(N\cdot\operatorname{grad} f)=\pm P^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{grad}\varphi_0\cdot\operatorname{grad} f). \tag{63.14}$$

特别若取 φ_0 作为 f，则用(63.6)，得到

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}=\pm P^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{grad}\varphi_0)^2=\pm P^{\frac{1}{2}}, \tag{63.15}$$

再积分，得到

$$\varphi_0=\pm\int P^{\frac{1}{2}}ds. \tag{63.16}$$

若考虑(63.14)，则(63.7)，(63.8)，…可写成

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}=\pm\frac{i}{2}P^{-\frac{1}{2}}\Delta\varphi_0,\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial s}=\pm\frac{1}{2}P^{-\frac{1}{2}}[i\Delta\varphi_1-(\operatorname{grad}\varphi_1)^2],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots, \tag{63.17}$$

积分之，得到

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1&=\pm\frac{i}{2}\int P^{-\frac{1}{2}}\Delta\varphi_0 ds,\\
\varphi_2&=\pm\frac{1}{2}\int P^{-\frac{1}{2}}[i\Delta\varphi_1-(\operatorname{grad}\varphi_1)^2]ds,\\
\varphi_n&=\pm\frac{1}{2}\int P^{-\frac{1}{2}}\left[i\Delta\varphi_{n-1}-\sum_{m=1}^{n-1}(\operatorname{grad}\varphi_m\cdot\operatorname{grad}\varphi_{n-m})\right]ds.
\end{aligned}\right\} \tag{63.18}$$

同样可解(63.12)。即将(63.12)改写成

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial s}\pm\frac{1}{2}(P^{-\frac{1}{2}}\Delta\varphi_0)\psi_n=\mp\frac{1}{2}P^{-\frac{1}{2}}\Delta\psi_{n-1}, \tag{63.19}$$

再根据綫性常微分方程的公式，立即可求得

$$\psi_n=\left(A_n\mp\frac{1}{2}\int P^{-\frac{1}{2}}G^{-1}\Delta\psi_{n-1}ds\right)G, \tag{63.20}$$

$$G=\exp\left(\mp\frac{1}{2}\int P^{-\frac{1}{2}}\Delta\varphi_0 ds\right)=\exp(i\varphi_1). \tag{63.21}$$

这里的 A_n 与 s 无关。

2) 現在研究最简单的 $P=1$ 的情形。即(63.1)为 Helmholtz 方程

$$(\varDelta+k^2)\varPhi=0. \tag{63.22}$$

在(63.15)中，于 $s=0$，若取 $\varphi_0=0$ 来规定积分常数，則得出

$$\varphi_0=\pm s. \tag{63.23}$$

$P=1$ 意味着均匀的介质，射綫为直綫，若知道了一个波面，很容易得到其他的波和波上 φ_0 的値(Huygens 原理)。

用 s 和波面上的正交曲綫坐标 (ξ_1, ξ_2) 来定义空間內的正交曲綫坐标 (s, ξ_1, ξ_2)，假設其綫元素 dS 可从

$$dS^2=ds^2+g_{11}d\xi_1^2+g_{22}d\xi_2^2 \tag{63.24}$$

給出。則 $\varDelta\varphi_0$ 由(63.23)可由簡单的公式

$$\begin{aligned}\varDelta\varphi_0&=\pm\varDelta s=\pm\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\sqrt{g_{11}g_{22}}\frac{\partial s}{\partial s}\right)\\&=\pm\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{g}=\pm\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\log g\end{aligned} \tag{63.25}$$

表出。这里的 $\sqrt{g}$ 是

$$\sqrt{g}=\sqrt{g_{11}g_{22}}. \tag{63.26}$$

若注意到波面上的面元素为 $\sqrt{g_{11}g_{22}}\,d\xi_1 d\xi_2$ 时，則可知(63.25)为射綫束的截面积沿射綫的变化率。把(63.25)代入(63.18)，使 $P=1$，再除去与 s 无关的附加項，則得到

$$\varphi_1=\frac{i}{4}\log g. \tag{63.27}$$

若用(63.23)，(63.27)，則对于(63.2)，(55.1)中的 $\varPhi$ 的粗略近似，可以表示为

$$\varPhi=A(s_0)g_0^{\frac{1}{4}}g^{-\frac{1}{4}}e^{\pm iks}. \tag{63.28}$$

这里的积分常数是这样确定的：即于 $s=s_0$ 时，$\varPhi$ 为 $A(s_0, \xi_1, \xi_2)$，g_0 为 g 于 s_0 的値。(63.28)为相当于(55.9)的近似式。

在普通的波的問題里，k 为实数，(63.28)的絕对值的 2 乘方，

即能量密度为

$$|\Phi|^2=|A|^2 g_0^{1/2}/g^{1/2},\tag{63.29}$$

由(63.26)，可知有这样的能量不变原则：即能量密度与射綫束的截面积成反比例。(63.20)也可用下列简单的公式表示：

$$\psi_n=g^{-\frac{1}{4}}\left\{A_n(s_0)g_0^{\frac{1}{4}}\mp\frac{1}{2}\int_{s_0}^{s}g^{\frac{1}{4}}\Delta\psi_{n-1}ds\right\}.\tag{63.30}$$

例 （i）平面波对抛物柱面的反射[46].

取以焦点O为极的平面极坐标(r,θ)，则抛物面的方程是

$$r=r_0(\theta)=\frac{2p}{1+\cos\theta}.\tag{63.31}$$

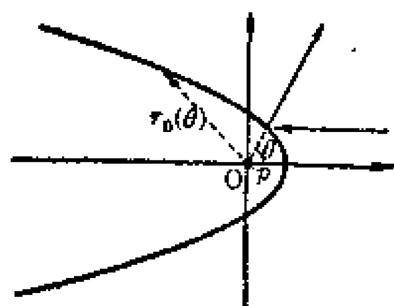


图 63.1

考虑如图中具有平行于軸的射綫的平面波

$$\Phi_i=e^{-ikx}\tag{63.32}$$

由右方入射时，在抛物面$r=r_0(\theta)$上出现满足条件

$$e^{-ikx}+\Phi_r(r,\theta)=0\tag{63.33}$$

的反射波Φ_r.

由几何光学显然可知，此时的射綫为由焦点O向外引出的直綫。从而，波面为以O为中心的圆柱面，所以极坐标仍然适用。因为波面的面元素为$rd\theta$，(而$d\xi_1=rd\theta$)故可設

$$s=r,\quad \sqrt{g}=r.\tag{63.34}$$

另外，对于反射波可采用(63.28)中的指数符号内的$+iks$、比較(63.28)和(63.33)，则有$r=r_0(\theta)$；再考虑$x=r_0(\theta)\cos\theta$，则得

$$e^{-ikr_0(\theta)\cos\theta}+A(s_0)e^{ikr_0(\theta)}=0,\tag{63.35}$$

若就$A(s_0)$解之，再利用(63.31)，则有

$$A(s_0)=-\exp[-ikr_0(\theta)(1+\cos\theta)]=-\exp(-2ikp),\tag{63.36}$$

将此代入(63.28)，则得反射波的漸近形

$$\Phi_r=-\sqrt{\frac{p}{r}}\sec\frac{\theta}{2}e^{ik(r-2p)}.\tag{63.37}$$

这与Lamb求得的精确解的漸近展开的主项完全一致。

（ii）如果射綫不是由一点O出发的情况，当然也可以研究。特别考虑2維的情况($d\xi_2=0$)。此时可取射綫的长s和与射綫方向的傾角θ作为独立变

数。对于波面的曲率半径 $R(\theta)$，以及面元素 $\sqrt{g}\,d\theta$，可分别写为如下：

$$R(\theta)=R_0(\theta)+s, \quad \sqrt{g}\,d\theta=R(\theta)\,d\theta. \tag{63.38}$$

但 $R_0(\theta)$ 为基准波面（其上 $s=0$）的曲率半径，又可根据曲面的凸凹而确定正負号。例如，在任意閉曲面 s_0 上，取定值 1，但在无限远($s\to\infty$)处接近于 0

$$(\Delta-|k|^2)\Phi=0 \tag{63.39}$$

的解，若取 s_0 为基准波面，于(63.28)令 $\pm k\to-|k|$（于 $s\to\infty$ 的条件），$A=1$，则近似地等于

$$\Phi=\sqrt{\frac{R_0(\theta)}{R(\theta)}}\,e^{-|k|s}. \tag{63.40}$$

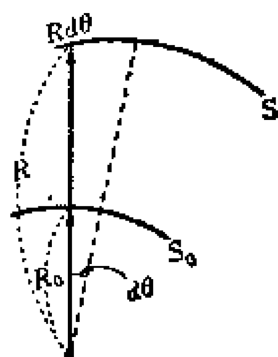


图 63.9

特别若参照(63.28)可知：在問題中的 s_0 上，Φ 的外向法綫方向的微分是

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)_{s=0}=-|k|\mp\frac{1}{2R(\theta)}. \tag{63.41}$$

第 1 項是曲率为 0 的面，即平面时的值，第 2 項可根据面的凸凹来修正。

上述的例題都可用前面讲过的方法增高近似的程度，但是我們只介紹到这里为止[46], [54]。

若射綫有包絡，或形成阴影的地方，或者物体面上有尖，则在其近傍使用上述簡单的方法是不够的，关于这些方面，有待于以后的研究。

第 9 章　Poincaré–Lighthill–郭永怀方法及边界层方法

更难的是非綫性的問題。在这章首先介紹由 Lighthill 发展的关于形状特别的，而其最高阶微商的系数为 $x+\varepsilon u$（x 为独立变数，u 为因变数）的方法。在这里，特别当 $\varepsilon\to 0$ 时，近似解在点 $x=0$ 的近傍是表示奇异性质。因此，我們主要目的是研究在 $x\neq 0$ 的近似解怎样才能在 $x=0$ 的近傍也同样成立。这方法的組織性是非常强的，但它不一定适用于所有的問題。所以我們在这里，把与上述方法相比，虽然組織性不那么强，但适用范圍却很广的边界层方法加进来，借以弥补不足。两者的特长在于根据問題的性质，把独立变数或者因变数适当地加以扩大或縮小。关于这一点，在 WKB 法中业已見到过。

§64　引　言

現在来研究，在条件 $u(1)=1$ 下，解含小参数 ε 的微分方程

$$(x+\varepsilon u)\frac{du}{dx}+u=0 \tag{64.1}$$

的問題。这就是含非綫性項 $\varepsilon u\, du/dx$ 的非綫性方程。近似地解这种方程的常用方法是：当 $\varepsilon u\, du/dx$ 与其他項相比为小时，可以首先将此項忽視，以綫性化了的方程

$$x\frac{du}{dx}+u=0 \tag{64.2}$$

即

$$\frac{d}{dx}(ux)=0$$

的解

$$u=\frac{c}{x},\quad c=1\ (\text{由边界条件}) \tag{64.3}$$

代入(64.1)；或者变形后，代入

$$\frac{d}{dx}(ux) = -\varepsilon u \frac{du}{dx} \tag{64.4}$$

的右边，解非齐次方程

$$\frac{d}{dx}(xu) = -\varepsilon \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\varepsilon}{x^3}. \tag{64.5}$$

即将

$$u = \frac{1}{x}\left[c - \frac{\varepsilon}{2x^2}\right], \quad c = 1 + \frac{\varepsilon}{2}\text{(由边界条件)} \tag{64.6}$$

代入(64.4)的右边，逐次地增高其近似程度。

上述方法可更有系統地叙述如下。假定 u 可展成 ε 的冪級数

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x), \tag{64.7}$$

代入(64.4)的右边后，得到了

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{d}{dx}(xu_n) = -\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{n+m} u_n \frac{du_m}{dx}, \tag{64.8}$$

比較 ε 的各冪，再将所得的

$$\varepsilon^0: \frac{d}{dx}(xu_0) = 0, \tag{64.9}$$

$$\varepsilon^1: \frac{d}{dx}(xu_1) = -u_0 \frac{du_0}{dx}, \tag{64.10}$$

$$\varepsilon^2: \frac{d}{dx}(xu_2) = -u_0 \frac{du_1}{dx} - u_1 \frac{du_0}{dx} = -\frac{d}{dx}(u_0 \cdot u_1), \tag{64.11}$$

………………………………

在边界条件

$$u_0(1) = 1, \quad u_n(1) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{64.12}$$

下，逐次解之便可。由(64.9)，有

$$u_0 = \frac{1}{x}. \tag{64.13}$$

将此式代入(64.10)，考虑(64.12)后再积分，则得到

$$xu_1 = \int_1^x \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \tag{64.14}$$

即

$$u_1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right). \tag{64.15}$$

同样地，把(64.13)，(64.15)代入(64.11)，得到

$$-xu_2(x)=u_0(x)u_1(x)-u_0(1)u_1(1)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right), \tag{64.16}$$

即

$$u_2(x)=\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right). \tag{64.17}$$

这种方法非常有系統，故此，在原理上看，无論多么高的近似都可以求出。但假若我們所要知道的是 $u(0)$，或是 $u(0.1)$. 首先，对于 $u(0)$ 产生无限大的結果。对于 $u(0.1)$ 若取至第3近似，則为

$$u\doteqdot u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2u_2+\cdots=10+\frac{1}{2}(10-1000)\varepsilon$$

$$-\frac{1}{2}(1000-100000)\varepsilon^2+\cdots. \tag{64.18}$$

若 ε 的值不是相当地小，这个級数便发散。由此我們产生这样一个疑問：即 $u(0)=\infty$ 的这个結果，还是本来就应該如此的呢，还是由于所采取的近似法不好而使其成了这样的呢？在 $x=0$ 的近傍，随着进行逐次近似的同时，奇异性在不断地增加着。

把上述的近似解代入(64.1)的 du/dx 的系数 $x+\varepsilon u$ 中，便知道解的近似程度是不好的。在 $x\sim0$ 的近傍，εu 和 x 相比，确实不一定是很小的。当 $\varepsilon\to0$ 时，在 $x\sim0$ 的近傍，最高阶的微商的系数消失，这与 WKB 法时一样，但現在是非綫性的方程，并且变数 x，u 与参数 ε 允許取所有的值，故此，就更为复杂了。

然而，(64.1)的精确解是很容易求出的。不取 x 而取 u 为变数，則方程变为綫性方程

$$u\frac{dx}{du}+x+\varepsilon u=0, \tag{64.19}$$

若改写为

$$\frac{d}{du}(ux)=-\varepsilon u, \tag{64.20}$$

則立即得到解

$$ux=-\frac{\varepsilon}{2}u^2+c, \tag{64.21}$$

或者由边界条件 $u(1)=1$，把 c 定为 $1+\varepsilon/2$，則这个解也可写为❶

$$x=\frac{1}{u}+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{u}-u\right). \tag{64.22}$$

反过来，若想以 x 表示 u 时，可把(64.21)或(64.22)看成是关于 u 的 2 次方程，解之便可。对应于 $u(1)=1$，取其根号为正的，則有

$$u=\frac{1}{\varepsilon}\left[-x+\sqrt{x^2+2\varepsilon+\varepsilon^2}\right], \tag{64.23}$$

由此，当 $x=0$ 时，u 的值 $u(0)$ 为

$$u(0)=\frac{\sqrt{2+\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\left[1+\frac{\varepsilon}{4}+O(\varepsilon^2)\right], \tag{64.24}$$

尽管它可以很大，但总是有限的值。再由 $1/\sqrt{\varepsilon}$ 的外形不难了解，使用将解展成 ε 的幂級数的方法是行不通了。另外，把(64.23)展成 ε 的幂級数时，它的收斂半徑接近于 $x^2/2$，因此，当 x 趋近 0 时将急速的减小。这样一来，通常地逐次近似法对于 x 将得不到一致的近似。針对着这样的缺陷，必然要求对現有的近似方法作一些修改。如已見到那样，最好是避开解的奇异点，或是奇异点虽

❶ 若将(64.1)写成

$$x\frac{du}{dx}+u+\varepsilon u\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\left(xu+\frac{\varepsilon}{2}u^2\right)=0,$$

則更能直接求出，这里为了叙述方便，采用了别的方法。

存在，但使逐次近似的收敛不受其影响，这两者是否真有可能呢？

如在(64.22)中見到的那样，若独立变数与因变数能交换，則进行近似确实沒有困难。例如(64.22)中的第2近似就实际地給出了精确的解。

但在一般情况下就不会这样順利。因此，可以考慮，把独立变数和因变数两者作为某一变数的函数而看成平等的变量。剩下来的問題是，寻找这个方法。

作为单純地使用摄动計算，逐次近似法发散的典型例子，考慮一下众所熟知的非綫性振动周期解的問題。

作为具体例子，今求非綫性微分方程

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u+\varepsilon u^3=0 \tag{64.25}$$

的周期解。若 t 为时間，u 为变位，則这方程是承受与 $\omega^2u+\varepsilon u^3$ 成比例的恢复力的质点的振动(非綫性振动)方程。当 ε 为0时，它是周期为 $2\pi/\omega$ 的綫性振动方程。

把(64.25)当 ε 为0时的解

$$u_0=a\cos\omega t \tag{64.26}$$

作为第1近似，并求形状如

$$u=u_0+\varepsilon u_1+\cdots \tag{64.27}$$

的解，則知道对 u_1 的方程为

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+\omega^2u_1=-u_0^3=-a^3\left(\frac{3}{4}\cos\omega t+\frac{1}{4}\cos 3\omega t\right), \tag{64.28}$$

其解为

$$u_1=-\frac{3a^3}{8\omega}t\sin\omega t+\frac{a^3}{32\omega^2}\cos 3\omega t+a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t. \tag{64.29}$$

但是 $t\sin\omega t$ 项与周期解的条件相違背，同时当 $t\to\infty$ 时，引起了

解的发散。与前述的例题同样，越进行高次的近似，这个情况就愈恶化。这个项的起因是由于(64.28)左边的项 $\cos\omega t$；因为当(64.28)的左边$=0$时，所产生的是周期为 $2\pi/\omega$ 的振动系統，对这个系統加上了同一周期的外力后，得到共振。(64.28)与共振的方程具有相同的形状。要解决这个困难可用熟知的 Poincaré 法。因为(64.25)有精确解，所以在叙述 Poincaré 法之前，先从(64.25)开始研究。以 du/dt 乘(64.25)，并将它改写成

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{\omega^2}{2}u^2+\frac{\varepsilon}{4}u^4\right]=0, \qquad (64.30)$$

积分后，再經过

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\omega^2u^2+\frac{\varepsilon}{2}u^4-2E=\text{常数} \qquad (64.31)$$

($(du/dt)^2/2$ 为动能，$\omega^2u^2/2+\varepsilon u^4/4$ 为位能，E 为全能量)，则得能量(Energy)积分

$$t=\int^u\frac{du}{\sqrt{2E-\omega^2u^2-\varepsilon u^4/2}}$$

$$=\int^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{\omega^2+\varepsilon A^2(1-\cos^2\theta/2)}} \qquad (64.32)$$

(第3项为利用(64.33)的 A，設 $u=A\sin\theta$ 而得的)。这是椭圆积分，并显然可知：u 为 t 的周期函数。利用一般的方法便可求出振幅和周期。振幅 A 为 $|u|$ 的最大值，即当 $du/dt=0$ 时的 u 值(同样地，也可作为当(64.32)的分母为0时的 u 值)，由(64.31)，得到

$$A^2=\frac{1}{\varepsilon}\left(-\omega^2+\sqrt{\omega^4+4\varepsilon E}\right)$$

$$=\frac{\omega^2}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1+4\varepsilon E/\omega^4}\right). \qquad (64.33)$$

周期 T 为由0起經过 A, 0, $-A$, 再回到0的时間，又由(64.32)的被积函数的对称性得知，它是由0到 A 的时間的4倍，即

$$T=4\int_0^A\frac{du}{\sqrt{2E-\omega^2u^2-\varepsilon u^4/2}}$$

$$=\frac{4}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\varepsilon A^2(1-\cos^2\theta/2)/\omega^2}}. \tag{64.34}$$

若 ε 很小时，把(64.33)，(64.34)展成 ε 的冪級数，则得

$$A^2=\frac{2E}{\omega^2}\left[1+O\left(\frac{\varepsilon E}{\omega^4}\right)\right], \tag{64.35}$$

$$T=\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{2\pi}{\omega}\left[1-\frac{\varepsilon A^2}{\pi\omega^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\cos^2\theta}{2}\right)d\theta+O\left(\frac{\varepsilon^2A^4}{\omega^4}\right)\right]$$

$$=\frac{2\pi}{\omega}\left[1-\frac{3\varepsilon A^2}{8\omega^2}+O\left(\frac{\varepsilon^2A^4}{\omega^4}\right)\right]. \tag{64.36}$$

(64.36) 充分地揭露了 (64.26) ~ (64.29) 的手續上的缺陷。即，若 $\varepsilon A^2/\omega^2$ 很小时则周期为 $2\pi/\omega$，而与振幅无关；初看起来似乎有可能把解写成 $2\pi/\omega$ 的周期函数；然而，当 t 很大时，则 Ω 与 ω 即便相差很小，但位相 Ωt 与 ωt 之差仍可能非常大，所以不可能成为近似解。这就是由出現在(64.29)中的危險項 $t\sin\omega t$ 而产生的問題。

显然可知，有效地近似法是：必須使用具有(64.34)或(64.36)所表示的周期的函数。但 T 或 Ω 在开始时是未知的，因而必須以适当的方法决定它。

Poincaré 的方法是：当含有小参数 ε 的联立方程

$$\frac{du^{(i)}}{dt}=X^{(i)}(u^{(1)},\ \cdots,\ u^{(i)},\ \cdots,\ u^{(m)};\ \varepsilon)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{64.37}$$

于 $\varepsilon=0$ 有周期 T_0 的簡单的周期解 $u_0^{(i)}$ 时，把解展成由 $u_0^{(i)}$ 开始的 ε 的冪級数

$$u^{(i)}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n u_n^{(i)}; \tag{64.38}$$

同时再考虑上述的情况，把周期 T 展成由 $T_0=2\pi/\omega$ 开始的 ε 的幂級数

$$T=T_0+\varepsilon T_1+\cdots, \tag{64.39}$$

然后，使上述的危險項能够消失那样，逐次地决定 T_n。这样地述說不免过于抽象了，今取(64.25)为例来解释一下(即，于(64.37)中，当 $m=2$, $u^{(1)}=u$, $u^{(2)}=du/dt$, $X^{(1)}=u^{(2)}$, $X^{(2)}=-\omega^2u^{(1)}-\varepsilon u^{(1)3}$ 的情况)。为了簡单起見，假定与(64.39)等价的有

$$\frac{2\pi}{T}=\Omega=\omega+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots \tag{64.40}$$

成立，再把

$$\omega=\Omega-\varepsilon\omega_1-\varepsilon^2\omega_2-\cdots \tag{64.41}$$

与(64.38)同时代入(64.25)，然后比較 ε 的等冪項，則得

$$\frac{d^2u_0}{dt^2}+\Omega^2u_0=0, \tag{64.42}$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+\Omega^2u_1=-u_0^3+2\omega_1\Omega u_0, \tag{64.43}$$

………………………….

(64.42)不过是在(64.25)中，忽略了第3項，再把 ω 換成 Ω 而已；而(64.43)是在(64.28)中加上了 $2\omega_1\Omega u_0$ 而得的式子，故为

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+\Omega^2u_1=\left(-\frac{3}{4}a^3+2\omega_1a\Omega\right)\cos\Omega t-\frac{a^3}{4}\cos 3\Omega t. \tag{64.44}$$

共振項为 $\cos\Omega t$，若使其系数为0，即使

$$\omega_1=\frac{3a^2}{8\Omega}, \tag{64.45}$$

則它将被消去。将此代入(64.40)，則有

$$\Omega=\omega\left[1+\frac{3\varepsilon a^2}{8\omega^2}+O\left(\frac{\varepsilon^2a^4}{\omega^4}\right)\right], \tag{64.46}$$

若再考虑

$$|A|^2=\max|a\cos\omega t+\varepsilon u_1|^2=a^2\left[1+O\left(\frac{\varepsilon a^2}{\omega^2}\right)\right], \tag{64.47}$$

則得与(64.36)一致的結果。

总之，Poincaré 法是借助于所謂周期的未知参数的展开而除去了困难，但是对于(64.1)这种方法是不直接存在的。可是只要把 Poincaré 法稍加改变，它便会有更广泛的用途。

因为我們的目的在于求一个恰当地 Ωt 作为位相，所以若把 Ωt 写成 $\Omega t=\omega\cdot\dfrac{\Omega}{\omega}t$，便可知：若不取 t 为独立变数，而取 $\tau=\dfrac{\Omega}{\omega}t$ 为独立变数，則利用原先的 ω 也可以写出形如 ωt 的恰当的位相。换句話說：就是改变一下时間的尺度(由場所而定)。由于这个方法在非周期的情形也适用，因而它的应用范圍极广，并富有灵活性。t 与 τ 的关系如

$$t=t(\tau)=\frac{\omega}{\Omega}\tau=\tau-\frac{3\varepsilon a^2}{8\omega^2}\tau+O\left(\frac{\varepsilon^2a^4}{\omega^4}\right)\tau \qquad (64.48)$$

所示，它与进行逐次近似的同时便可求出；所以恰好如在(64.24)之后所希望的那样，提供了一个以輔助变数表示独立变数的方法。

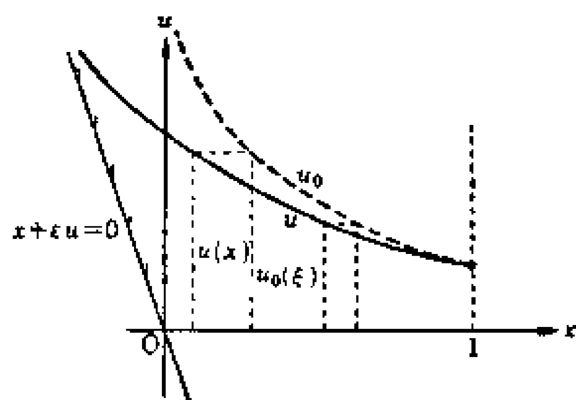


图　64.1

要想把剛才讲过的想法应用于(64.25)，只要写 $\Omega t\to\omega\tau$，并把(64.40)以下的各个式子改写一下就可以了。在这里我們再討論一次(64.1)，关于更一般地情形，留待以后再进行討論。

图 64.1 表示(64.23)中 u 与 x 的关系。另外，微分方程(64.1)在 x-u 平面各点处給出了解曲綫的切綫；当 $x+\varepsilon u=0$ 时，切綫成为垂直的 $(du/dx\to\infty)$，而 $x+\varepsilon u=0$ 为接近于它的所有的解曲綫的漸近綫。图中的虚綫表示(64.1)的近似解(64.13)，$x=0$ 为其漸近綫，当 x 离 0 愈远时，有愈好的近似，而 x 愈接近 0，誤差就愈大。

但是，u_0 也不是完全沒有用的。如图中所示，可把它看成别的变数 ξ 的函数。只要求出 ξ 与 x 間的变换，則便可由它求出正确的解：$u(x)=u_0(\xi)$．这样作不会产生逐次近似的发散。另外，若把图中的横軸延长，則 x 与 ξ 一般地相差很小，它表示了 ε 的程度，同时它还具有这样的性质，即在离开 0 較远处将要消失。因此，在有奇异性的地方，也能利用延长变动独立变数的坐标軸的方法，而使粗略的近似成为精确的，从而在全域内得到一致的近似。先讲这些作为引言，下面讲讲具体办法。

現在为了使(64.40)与(64.48)能同样地进行近似的同时，进行精密化。把 x 与 ξ 的对应关系表示为

$$x=x(\xi)=\xi+\varepsilon x_1(\xi)+\varepsilon^2 x_2(\xi). \tag{64.49}$$

又为了簡单起見，假定于 $x=1$ 处 x 与 ξ 是一致的，則有

$$x_1(1)=x_2(1)=\cdots=0. \tag{64.50}$$

今以 ξ 为独立变数，把(64.1)即(64.4)写成

$$\frac{d}{d\xi}(xu)=-\varepsilon u\frac{du}{d\xi}, \tag{64.51}$$

再把

$$u=u_0(\xi)+\varepsilon u_1(\xi)+\cdots \tag{64.52}$$

与(64.49)代入(64.51)，然后比較 ε 的等幂項，則得到

$$\frac{d}{d\xi}(\xi u_0)=0, \tag{64.53}$$

$$\frac{d}{d\xi}(\xi u_1)=-u_0\frac{du_0}{d\xi}-\frac{d}{d\xi}(x_1 u_0), \tag{64.54}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

其中，边界条件为

$$u_0(1)=1,\quad u_n(1)=0,\quad n=1,\ 2,\ \cdots. \tag{64.55}$$

由(64.53)，(64.55)，得到

$$u_0(\xi)=\frac{1}{\xi}, \tag{64.56}$$

将此式代入(64.54)，得到

$$\frac{d}{d\xi}(\xi u_1)=\frac{1}{\xi^3}-\frac{d}{d\xi}\left(\frac{x_1}{\xi}\right)=\frac{d}{d\xi}\left(-\frac{1}{2\xi^2}-\frac{x_1}{\xi}\right), \tag{64.57}$$

考虑(64.55)，并把(64.57)积分至 ξ，则所得的

$$\xi u_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\xi^2}\right)-\frac{x_1}{\xi} \tag{64.58}$$

与(64.15)只相差 x_1 項。x_1 是可以适当地选取的，但在現在的情形下，若选取能使(64.58)的右边完全为0的

$$x_1=\frac{\xi}{2}\left(1-\frac{1}{\xi^2}\right), \tag{64.59}$$

則 $u_1\equiv 0$；再把 x_2 以下的选为0，則在(64.54)与(64.11)以后的，关于 u_2 以下的式子里，u_2 以下的完全成为0；这样一来，只用 $u_0(\xi)$ 便可以得出精确的値。把以上的結果代入(64.52)，(64.49)后，得到的

$$u=\frac{1}{\xi}, \tag{64.60}$$

$$x=\xi+\frac{\varepsilon\xi}{2}\left(1-\frac{1}{\xi^2}\right), \tag{64.61}$$

确实与(64.22)一致，并給出(64.1)的精确解。在現在的情形下，可选取 x_1 使(64.58)的右边完全为0，而在一般情形下，应該象非綫性振动的情形一样，选取 x_1 使危險項 $1/\xi^2$ 消失。这样作虽然得到的不是精确解，但是至少在全領域中会得到一致的近似。

上述方法一般地也可以推广到偏微分方程。只須在綫性方程的奇异点（例如 $x=0$, $y=0$）的附近施行坐标变换：$x=x(\xi, \eta)$, $y=y(\xi, \eta)$ 卽可。这样的坐标变换，只要使近似解 $u_0(\xi, \eta)$ 与正确解 $u(x, y)$ 尽可能地接近，所以它是可以求得的。卽使用形如

$$x=\xi+\varepsilon x_1(\xi, \eta)+\cdots, \tag{64.62}$$

$$y=\eta+\varepsilon y_1(\xi,\ \eta)+\cdots, \tag{64.63}$$

$$u=u_0(\xi,\ \eta)+\varepsilon u_1(\xi,\ \eta)+\cdots \tag{64.64}$$

的展开，使 εu_1 以下的在全变域中尽可能地小。从而来决定 x_1, y_1. 关于 u_1 的方程在 $x, y=0$ 附近的奇异性，一般要比关于 u_0 的强烈，但是这一点也是可以避免的；另外，在关于 u_1 的方程中，若把它成为奇异性原因的項消失后，再利用关于 x, y 的方程，便可得到决定 x_1, y_1 的办法。

Lighthill 把上述方法应用于綫性化了的方程与原微分方程为同阶的情形，而郭永怀更进一步，作为第 1 近似的方程是非綫性的、阶数比原方程低的例子，而把上述方法应用于通过平板的粘性流的边界层近似的精密化問題上，并且获得了成功。錢学森就取了 Poincaré, Lighthill, 郭永怀 (Kuo) 开头的字母，把上述的方法命名为 PLK 法。但是这种叫法也不完全一致。欧美有很多人称这种方法为 Lighthill 法 (Lighthill-technique)。

但是这种方法还只是出于实际应用者之手，因而关于它的收斂性以及其他严密的理論，还有很多不完善之处。只有 Wasaw 对 §65～§69 中所举的特例进行了証明，所以关于这一方面还有賴于数学家将来的努力。以下各节，以叙述特例的解法的技术为主，关于收斂性等的証明，差不多都省略了。只叙述一些証明的思路。

§65 常微分方程 $(x+\varepsilon u)u'+q(x)u-r(x)=0$

从 Lighthill 最早提出的例題

$$L[u]=(x+\varepsilon u)u'+q(x)u=r(x) \tag{65.1}$$

开始研究。$q(x)$, $r(x)$ 在問題的区域内是正則的。特别，若在方程中，代替了取在 $x=x_0$ 处有零点的函数 $f(x)$ 时，它便是

$$[f(x)+\varepsilon u]u'+q(x)u=r(x) \tag{65.2}$$

的典型情况，当 $\varepsilon=0$, $x=0$ 时，u' 的系数为 0，这是它的特点。

现在考虑，在边界条件，例如

$$x=1,\quad u=a \tag{65.3}$$

下，如何解(65.1)．在 x-u 平面上来説，这不过是寻找通过点$(1,a)$的解曲綫罢了。

沿用前章的办法，施行变数变换

$$x=\xi+\varepsilon x_1(\xi)+\varepsilon^2 x_2(\xi)+\cdots, \tag{65.4}$$

$$u=u_0(\xi)+\varepsilon u_1(\xi)+\varepsilon^2 u_2(\xi)+\cdots, \tag{65.5}$$

并考虑 $u'=du/dx=(du/d\xi)/(dx/d\xi)$，则(65.1)可写为

$$(x+\varepsilon u)\dot{u}+\{q(x)u-r(x)\}\dot{x}=0. \tag{65.6}$$

这里的"·"表示对 ξ 的微分。

考虑(65.4)，(65.5)，在 $x=\xi$ 的近傍，把 $\{q(x)u-r(x)\}\dot{x}$ 展开，则得到

$$\{q(x)u-r(x)\}\dot{x}=\{qu+(x-\xi)\dot{q}u-r-(x-\xi)\dot{r}\}\dot{x}+F(x,\ u,\ \dot{x},\ \xi) \tag{65.7}$$

$$F(x,\ u,\ \dot{x},\ \xi)=\left[\left\{\frac{1}{2}(x-\xi)^2\ddot{q}+\cdots\right\}\{u_0+\varepsilon u_1+\cdots\}-\left\{\frac{1}{2}(x-\xi)^2\ddot{r}+\cdots\right\}\right]\dot{x}$$

$$=\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^s h_s(x_1,x_2,\cdots,x_{s-1};\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_{s-1};u_0,\cdots,u_{s-1};\ \xi), \tag{65.8}$$

$$h_s=\sum A_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\mu;\beta;\gamma}(\xi)x_1^{\alpha_1}\cdots x_\mu^{\alpha_\mu}\dot{x}_\nu^{\beta}u_\rho^{\gamma}, \tag{65.9}$$

但是

$$\alpha_1+2\alpha_1+\cdots+\mu\alpha_\mu+\nu\beta+\rho\gamma=s,\quad \beta=0,\ 1;\ \gamma=0,\ 1. \tag{65.10}$$

这里的 q_1，$\dot{q}_1$，r_1，$\dot{r}_1$ 等，分别表示 $q_1(\xi)$，$\dot{q}_1(\xi)$，$r_1(\xi)$，$\dot{r}_1(\xi)$．将(65.7)和(65.8)代入(65.6)，并考虑(65.4)，(65.5)，再使 ε 的同幂项相等，则得到

$$L_0[u_0]\equiv\xi\dot{u}_0+qu_0-r=0, \tag{65.11}$$

$$L_1[v_1,\ x_1]\equiv\xi\dot{v}_1+qv_1+(qu_0-r)\dot{x}_1 + (\dot{u}_0+\dot{q}u_0-\dot{r})x_1+u_0\dot{u}_0=0, \tag{65.12}$$

....

$$L_s[u_s,\ x_s]\equiv\xi\dot{u}_s+qv_s+(qu_0-r)\dot{x}_s + (\dot{v}_0+\dot{q}u_0-\dot{r})x_s+R_s=0, \tag{65.13}$$

但是

$$R_s=\sum_{\substack{\mu+\nu=s\\ \mu,\ \nu>0}}x_\mu\dot{x}_\nu+\sum_{\mu+\nu=s-1}u_\mu\dot{u}_\nu+q\sum_{\substack{\mu+\nu=s\\ \mu,\ \nu>0}}\dot{x}_\mu u_\nu + \dot{q}\sum_{\substack{\mu+\nu+\rho=s\\ \mu,\nu>0}}x_\mu\dot{x}_\nu u_\rho+h_s. \tag{65.14}$$

若取

$$u_0(1)=a,\quad u_s(1)=0,\quad x_s(1)=0,\quad s=1,\ 2,\ \cdots, \tag{65.15}$$

則边界条件(65.3)便被滿足。最后的条件,卽是选取 ξ,使当 $\xi=1$ 时,$x=\xi$.

現在,問題已归結到,在边界条件(65.15)之下,由(65.11)的解 u_0 开始,逐次地解(65.11),(65.12),…。但是,因为在(65.12)以下的各式中,都有如$(u_1,\ x_1)$,$(u_2,\ x_2)$,…的两个未知数,故应先写成

$$L_s[x_s,\ u_s]\equiv L_s^{(0)}[u_s]+L^{(1)}[x_s]=0, \tag{65.16}$$

然后,再分成如下的两个式子:

$$L_s^{(0)}[u_s]\equiv\xi\dot{u}_s+qu_s+R_s^{(0)}=0,\quad s=1,\ 2,\ \cdots, \tag{65.17}$$

$$L_s^{(1)}[x_s]\equiv(qu_0-r)\dot{x}_s+(\dot{u}_0+\dot{q}u_0-\dot{r})x_s+R_s^{(1)}=0. \tag{65.18}$$

这里的 $R_s^{(0)}$ 和 $R_s^{(1)}$,在滿足

$$R_s^{(0)}+R_s^{(1)}\equiv R_s \tag{65.19}$$

的条件下,完全可以任意地选擇。但假若可能的話,还是选 $R_s^{(0)}\equiv0$ 为最好。因为,这样作,則从(65.15)得到 $u_s\equiv0$, $s=1,\ 2,\cdots$,于是只以 u_0 便可以表示 u,并且容易判断收斂性等。但是在某些問題

里，正确的解 $R_s^{(0)}=0$ 会有困难。那时，可利用在(65.19)中所提到的灵活性，把 R_s 分开，使它适合于問題的需要。

若将(65.11)改写为

$$\frac{d}{d\xi}\left\{u_0(\xi)\exp\int\frac{q(\xi)}{\xi}d\xi\right\}=\frac{r}{\xi}\exp\int\frac{q(\xi)}{\xi}d\xi, \quad (65.20)$$

就容易积分。假設 $q(0)=q_0$, $r(0)=r_0$. 因为 $q(\xi)$, $r(\xi)$ 在 $\xi=0$ 的近傍正則，故有

$$\exp\int\frac{-q(\xi)}{\xi}d\xi=\exp\left[-q_0\log\xi-q_0'\xi+\cdots\right]$$

$$=\xi^{-q_0}\tilde{p}(\xi), \quad (65.21)$$

这里的 $\tilde{p}(\xi)$ 对于 $|\xi|\leqq 1$, 是不为 0 的 ξ 的正則函数。

把(65.21)代入(65.20)，考慮(65.15)再积分，则得到

$$u_0(\xi)=a\xi^{-q_0}\frac{\tilde{p}(\xi)}{\tilde{p}(1)}+\xi^{-q_0}\tilde{p}(\xi)\int_1^{\xi}\frac{r(\eta)}{\tilde{p}(\eta)}\eta^{q_0-1}d\eta. \quad (65.22)$$

从而，若 q_0 不为 0，或为負整数时，可把 $u_0(\xi)$ 利用对于 $|\xi|\leqq 1$ 为正則的函数 $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$, 写成

$$u_0(\xi)=\xi^{-q_0}P_1(\xi)+P_2(\xi)\to A\xi^{-q_0}+B\ (\xi\to 0). \quad (65.23)$$

另外，若 q_0 取如 0, -1, -2, … 的 0 或負的整数时，则由(65.22)后面的积分，得出与 $\log\xi$ 成比例的項（与含 $\eta^{|q_0|}$ 的 $r/\tilde{p}$ 成比例的項）；从而，(65.23)有下列形狀：

$$u_0(\xi)=\xi^{-q_0}\left[P_1(\xi)+\tilde{P}_1(\xi)\log\xi\right]+P_2(\xi)$$

$$\to A\xi^{-q_0}\log\xi+B \quad (\xi\to 0). \quad (65.24)$$

由(65.14)知

$$R_1=R_1^{(0)}+R_1^{(1)}=u_0\dot{u}_0, \quad (65.25)$$

因而，关于 u_1 的問題归結为在(65.17)，(65.18)中，对 $s=1$，在 $u_1(1)=0$, $x_1(1)=0$ 的条件下，解

$$\xi\dot{u}_1+qu_1=-R_1^{(0)}, \quad (65.26)$$

$$(qu_0-r)\dot{x}_1+(\dot{u}_0+\dot{q}u_0-\dot{r})x_1=-R_1^{(1)}. \quad (65.27)$$

在普通的摄动法中，对于 $x_1=0$，有 $-R_1^{(1)}=0$，$-R_1^{(0)}=-u_0\dot{u}_0$；则解 $\tilde{u}_1(\xi)$ 是，在 (65.26)，(65.22) 中，以 $-u_0\dot{u}_0$ 代替 r，再参照 (65.20)，(65.21)，(65.15)，所得的

$$\tilde{u}_1(\xi)=-\xi^{-q_0}\tilde{p}(\xi)\int_1^\xi\frac{u_0(\eta)\dot{u}_0(\eta)}{\tilde{p}(\eta)}\eta^{q_0-1}d\eta. \tag{65.28}$$

由 (65.23)，(65.24) 知道，若是 q_0 不是 0，或是整数时，则当 $\xi\to 0$ 时，

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1(\xi)&=O[u_0(\xi)\dot{u}_0(\xi)]\\&\to O(\xi^{-2q_0-1})+O(\xi^{-q_0-1})+O(1),\end{aligned} \tag{65.29}$$

当 $q_0=0,\ -1,\ -2,\ \cdots$ 时，

$$\tilde{u}_1(\xi)=O(\xi^{-q_0-1}\log\xi)+O(1). \tag{65.30}$$

由上述可知，由于 q_0 的符号和整数性质的不同，因而产生的奇异性的形式也有所不同。即，若 $q_0>0$ 时，如 (65.23) 的第 1 项所示，$\tilde{u}_0(\xi)$ 当 $\xi\to 0$ 时发散，而 $\tilde{u}_1$ 更增大了这种倾向；可想而知，当重复进行逐次近似时，奇异性将增大到 $\xi^{-2q_0-1}/\xi^{-q_0}=\xi^{-q_0-1}$ 倍。

另外，若 $q_0<0$，$\tilde{u}_0(\xi)$ 暂时为有限，但如 (65.29) 的第 2 项所示，每进行一回逐次近似，都将增加一个因子 ξ^{-1}；因此，可想而知，这样继續下去終久会当 $\xi\to 0$，而 $\tilde{u}_n(\xi)$ 成为无限大。

另外，逐次近似的收斂半徑当 $\xi\to 0$ 时，前者的为 ξ^{q_0+1}，后者的与 ξ 成比例的縮小，这說明了展开的非一致性。

以上述情况为基础，在以下的数节里，分别討論 $q_0>0$，$q_0=0$，$q_0\leqq -1$，$0>q_0>-1$ 的情形。

§ 66 $q_0>0$ 的情形

$q_0>0$ 时，(65.29) 当 $\xi\to 0$ 时发散的原因是因为設了 $R_1^{(1)}=0$，但是 $R_1^{(0)}$ 如 (65.23) 所示当 $\xi\to 0$ 时发散。可是把它看成了与

$$R_1=-q_0A^2\xi^{-2q_0-1}Q_1^{(1)}(\xi)+\xi^{-2q_0}Q_1^{(0)}(\xi),\quad Q_1^{(1)}(0)=1 \tag{66.1}$$

相同的，故此导出了这样的結果。这里的 $Q_1^{(0)}(\xi)$，$Q_1^{(1)}(\xi)$ 如(65.23)所示，是 ξ^{-q_0} 的多項式，其系数为 ξ 的正則函数。为了避免这些，并把 u_1 至少保持与 $u_0=O(\xi^{-q_0})$ 的 ξ^{-q_0} 倍后所得的 $O(\xi^{-2q_0})$ 有相同的程度，就必須把最危險的第1項設法从 $R_1^{(1)}$ 中抵消。最便当的办法是：取 $R_1^{(0)}\equiv0$，$R_1^{(1)}\equiv R_1$，并使 $u_1\equiv0$；現在，在最不好的条件下开始研究。由此(65.26)，(65.27)为

$$\xi\dot{u}_1+qu_1=-\xi^{-2q_0}Q_1^{(0)}(\xi), \tag{66.2}$$

$$(qu_0-r)\dot{x}_1+(\dot{u}_0+\dot{q}u_0-\dot{r})x_1=q_0A^2\xi^{-2q_0-1}Q_1^{(1)}(\xi). \tag{66.3}$$

(66.2)的解是在(65.28)中，以 $-\eta^{-2q_0}Q_1^{(0)}(\eta)$ 换成 $u_0\dot{u}_0$ 后得到的

$$u_1(\xi)=\xi^{-q_0}\tilde{p}(\xi)\int_1^\xi\frac{Q_1^{(0)}(\eta)}{\tilde{p}(\eta)}\eta^{-q_0-1}d\eta, \tag{66.4}$$

当 $\xi\to0$ 时，它确实是 $O(\xi^{-2q_0})$. 另外，(66.3)对于 $0<\xi<1$ 若满足条件：

$$qu_0-r\neq0, \tag{66.5}$$

則在 $\xi=0$ 以外为正則，在 $\xi\to0$ 的附近，考慮(65.23)，(65.1)，則成为下列的形状：

$$(q_0A\xi^{-q_0}+\cdots)\dot{x}_1-(q_0A\xi^{-q_0-1}+\cdots)x_1$$
$$=q_0A^2\xi^{-2q_0-1}+\cdots, \tag{66.6}$$

所以，对于 $\xi\to0$，令 $x_1=B\xi^{-q_0}+\cdots$，再决定 B，便可知道 x_1 是

$$x_1(\xi)\to-A\xi^{-q_0}/(q_0+1), \tag{66.7}$$

且对于 $0\leqq\xi\leqq1$，为

$$x_1(\xi)=\xi^{-q_0}X_1(\xi) \tag{66.8}$$

的形状，这里的 $X_1(\xi)$ 是关于 ξ，ξ^{q_0} 的正則函数。

由上述的情况可知，为了对于 $\xi\to0$，将 $u_s(\xi)$ 取到 $O(\xi^{-(s+1)q_0})$ 項为止，(65.18)中的 $R_s^{(1)}$ 必須代表最危險的項；从而 x_s 对于 $\xi\to0$ 有奇异性，并且，其奇异性逐次上升到 ξ^{-q_0}；一般地說，$x_s\to O(\xi^{-sq_0})$,

这个事实也可以从(66.8), (65.13), (65.14)等预料得到。

現在再用数学归納法驗証这个問題。关于$s=1$的情形,在(66.8)中,已經証明过了。假定s到$n-1$为止,上述結論都是正确的,現在証明当s为n时,上述結論也是正确的。由(65.14),(65.9)知道,R_n可表示成为下列的形式:

$$R_n=\xi^{-(n+1)q_0-1}Q_n^{(1)}(\xi)+\xi^{-(n+1)q_0}Q_n^{(0)}(\xi), \qquad (66.9)$$

$Q_n^{(1)}(\xi)$, $Q_n^{(0)}(\xi)$ 关于ξ^{q_0}和ξ都是正則的。把R_n分成如上的两个部分,令第一项为$R_n^{(1)}$,再代入(65.18)中$s=n$的式中,然后用由(66.3)求x_1完全一样的办法(主項是同一的),当$\xi\to0$时,求出$x_n=O(\xi^{-(n+1)q_0-1+q_0+1})=O(\xi^{-nq_0})$. 再令第2项为$R_n^{(0)}$,代入(65.17)当$s=n$的式中,然后用由(66.2)求(66.4)完全同样的办法,便得到$u_n=O(\xi^{-(n+1)q_0})$. 这与在开始时所估計的x_n, u_n一致。証毕。

施行了上述方法,結果对于$\xi\to0$, 得到了

$$u_s(\xi)=O(\xi^{-(s+1)q_0}), \qquad (66.10)$$

$$x_s(\xi)=O(\xi^{-sq_0}), \qquad (66.11)$$

这个結果与在(65.29)处所預想的,用攝动法得到的值$u_s(\xi)=O(\xi^{-(s+1)(q_0+1)+1})$比較一下,好象差不了多少,但实际上,已經有了很大的改进。

作为一个例子,来考查一下在最危險的点$x=0$的近傍的情况。当ε充分小时,由(66.7), (66.11)知道,在$x=0$的近傍,x为

$$x=\xi+\varepsilon\left(-\frac{A\xi^{-q_0}}{q_0+1}+\cdots\right)+\varepsilon^2O(\xi^{-2q_0})+\varepsilon^3O(\xi^{-3q_0})+\cdots, \qquad (66.12)$$

令$x=0$, 再就ξ解这个式子,便得到

$$\xi=B\varepsilon^{\frac{1}{q_0+1}}[1+O(\varepsilon^{\frac{1}{q_0+1}})], \quad B=\left(\frac{A}{q_0+1}\right)^{\frac{1}{q_0+1}}. \qquad (66.13)$$

从而,在 $x=0$ 的近傍,由(66.10),(66.11)分别得出

$$\varepsilon^s u_s=\varepsilon^s O[\varepsilon^{-\frac{q_0}{q_0+1}(1+s)}]=\varepsilon^{-\frac{q_0}{q_0+1}}O[(\varepsilon^{\frac{1}{q_0+1}})^s], \quad (66.14)$$

$$\varepsilon^s x_s=\varepsilon^s O[\varepsilon^{-\frac{q_0}{q_0+1}s}]=O[(\varepsilon^{\frac{1}{q_0+1}})^s], \quad (66.15)$$

若 $1/(q_0+1)>0$, 则这个結果表明,当 ε 取成充分小时,(65.4),(65.5) 在 $x=0$ 处也收斂。另外,特别需要注意的是:$u(0)$ 不是 $O(1)$,而是 $O(\varepsilon^{-\frac{q_0}{q_0+1}})$. 从而,若設 $u_0=O(1)\times b$, 那末用前面的近似法去求 b, 必然会导出 $b\to\infty$ 的結論。

当 ε 充分小时,若取

$$u=u_0(\xi) \quad (66.16)$$

为最粗略的近似,并取 (66.12) 中到第2项为止的各项为 ξ, 则在 $x=0$ 的近傍,可以得到同样良好的近似。但是,(66.12)是解的参数表示;从而,从得出的 ξ 知道,u 为 x 的多値函数。当然,在我們所討論的情况下,选取使 $x=1$ 与 $\xi=1$ 一致的根便可。

若在(66.12)中,設 $dx/d\xi=0$, 便可以得到引起上述多値性的分歧点 ξ_c 及对应的 x_c, 即

$$\xi_c \doteqdot \left(-\frac{\varepsilon A q_0}{q_0+1}\right)^{\frac{1}{q_0+1}}, \quad x_c \doteqdot \left(1+\frac{1}{q_0}\right)\left(-\frac{\varepsilon A q_0}{q_0+1}\right)^{\frac{1}{q_0+1}}. \quad (66.17)$$

这个奇异性不是由近似法而产生的,而是原方程(65.1)在一开始便存在的。关于这一点,由下列事实便可以知道:即 (66.17) 中的 x_c 与从(65.23)导出的这种点的 u 値之間,有关系式

$$x_c+\varepsilon u_c \doteqdot \left(1+\frac{1}{q_0}\right)\left(-\frac{\varepsilon A q_0}{q_0+1}\right)^{\frac{1}{q_0+1}} +\varepsilon A\left(-\frac{\varepsilon A q_0}{q_0+1}\right)^{\frac{-q_0}{q_0+1}}=0, \quad (66.18)$$

并且,使(65.1)中 du/dx 的系数为 0. 这种方法的优点,就是对于

这种特殊情形也能进行处理。另外，若 A 值为負的，則由(66.17)知道，分歧点为出现在 0 与 1 之間的 x 的实数值。图 64.1 表示着 $A>0$ 的情形；而 $A<0$ 的情形，如图 66.1 所示，解停止在 $x=x_c$, $u=u(x_c)$ 处，并且不能再向前延长。对于 $x_c<x<1$，根据(66.12)所表示的 x 与 ξ 的对应，可能把 $u_0(\xi)$ 作为 $u(x)$ 的良好近似。当然，若把这个想法扩充到复变数，則 (65.4)，(65.5) 在 $x=0$ 的近傍都可使用（在适当的 Riemann 面上）。

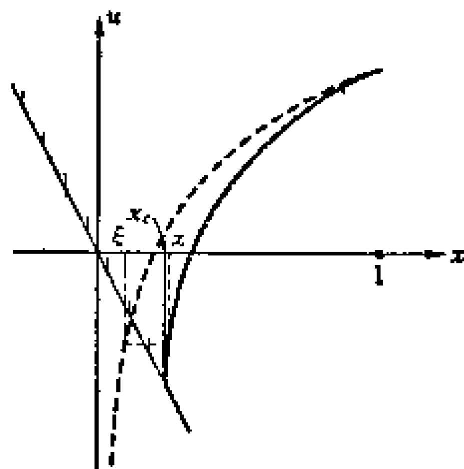


图 66.1

若 $A>0$，則在 0 与 1 之間的 x 处不存在分歧点了（一般地是复数），u 对于取負的实数值的 x，也只有当它关于 x 的級数(65.5)收斂时，才是正則的。

§ 67 $q_0=0$ 的情形

为了簡单起見，只在 $\xi=0$ 的近傍作簡单地論述。由(65.22)，(65.24)知道，当 $\xi\to 0$ 时，$u_0(\xi)$ 可以写为

$$u_0(\xi)=r_0\log\xi+B+O(\xi\log\xi). \tag{67.1}$$

于是，由(65.22)知道，(65.24)中的 A，由 $r_0=r(0)$ 給出。所以，$R_1=u_0\dot{u}_0$ 为

$$R_1=\frac{r_0}{\xi}(r_0\log\xi+B)+O((\log\xi)^2). \tag{67.2}$$

若第 1 项含于 $R_1^{(1)}$，則当 $\xi\to 0$ 时，(65.27)可写为

$$[-r_0+O(\xi\log\xi)]\dot{x}_1+\left[\frac{r_0}{\xi}+O(\log\xi)\right]x_1$$

$$=-\frac{r_0}{\xi}(r_0\log\xi+B). \tag{67.3}$$

以 $-r_0\xi$ 除之，并略去小的项，再改写为

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{x_1}{\xi}\right)=-\frac{1}{\xi^2}(r_0\log\xi+A), \qquad (67.4)$$

则有

$$x_1=-r_0\log\xi-(r_0+A), \qquad (67.5)$$

又因为 (65.26) 的右边为 $O((\log\xi)^2)$，若考虑 $q_0=0$，则当 $\xi\to 0$ 时，u_1 为

$$u_1=O\left(\int^{\xi}\frac{(\log\xi)^2}{\xi}d\xi\right)=O((\log\xi)^3). \qquad (67.6)$$

与 $q>0$ 时同样，为了把 u_s 保持在 $O((\log\xi)^{2s-1})$ 的程度，可以肯定 $R_s^{(1)}$ 必须为最危险项。x_s 为 $O((\log\xi)^{2s+1})$.

另外，利用(65.4)，(67.5)，写出

$$x=\xi-\varepsilon\{[r_0\log\xi+r_0+A]+O(\xi)\}+O\{\varepsilon^2(\log\xi)^3\}, \qquad (67.7)$$

则 $x=0$，由

$$\xi\doteq r_0\varepsilon(\log\varepsilon+\text{常数}) \qquad (67.8)$$

給出，可知級数(65.4)，(65.5)在 $x=0$ 近傍收斂。

§68　$q_0\leqq -1$ 的情形

一般地，在 $q_0<0$ 的情形下，由(65.22)知道，当 $\xi\to 0$ 时(q_0 为負整数的情形除外)，有

$$\lim_{\xi\to 0}u_0(\xi)=\lim_{\xi\to 0}\xi^{-q_0}r(0)\frac{\xi^{q_0}+O(\xi)}{q(0)}$$

$$=\frac{r_0}{q_0}+O(\xi^{-q_0})+O(\xi), \qquad (68.1)$$

$$\lim_{\xi\to 0}\dot{u}_0(\xi)=O(\xi^{-q_0-1})+O(1), \qquad (68.2)$$

$u_0(0)$ 取有限值，但可知当 $q_0<-1$ 与 $-1\leqq q_0<0$ 时，u_0 的性质有很大差别。这在 x-u 平面上的图形，如下图。

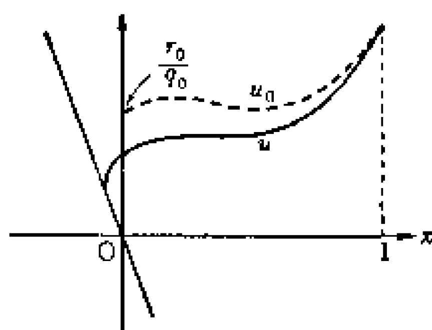


图 68.1 $q_0<-1$, $r_0<0$

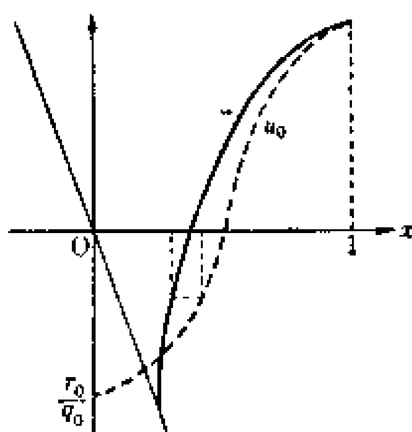


图 68.2 $q_0<-1$, $r_0>0$

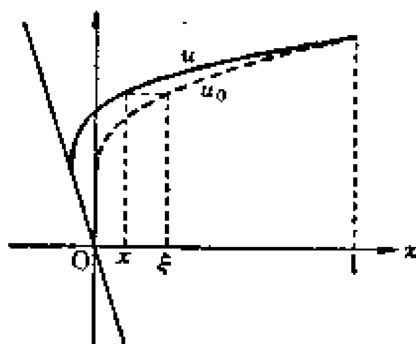


图 68.3 $-1 \leqq q_0<0$, $r_0<0$

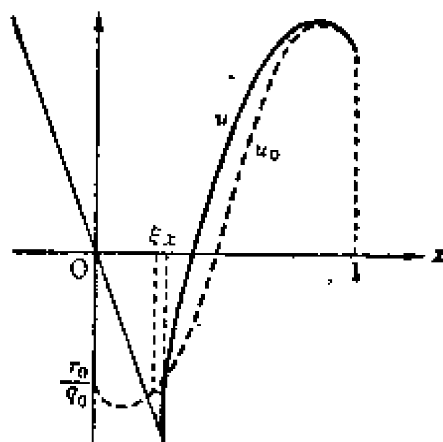


图 68.4 $-1 \leqq q_0<0$, $r_0>0$

所有的 u_0 都通过 $(0, r_0/q_0)$ (关于 u_0 式的节点)。当 $-1 \leqq q_0<0$ 时，$x=0$ 处的斜率为无穷大。另外，当 $q_0<-1$ 时，容易由图中看到斜率成为有限的。但是在 $x=0$ 的近傍建立 u_0 与 u 之間的对应关系是很困难的。

为了使 u_0 与 u 更接近，推导近似法更方便，最便利的方法是：象后面的图那样，取 r_0 为 0，并預先使 $u_0(\xi)$，$u(x)$ 都能通过原点而把 u 与 x 都降一个常数。

首先考虑 $q_0<-1$ 的情形。

因为由 (68.1)，(68.2)，(65.28) 知道，当 $\xi \to 0$ 时 (65.25) 可表示为

$$R_1 = u_0 \dot{u}_0 = O(\xi^{-q_0-1}) + O(\xi^{-q_0}) + O(1), \qquad (68.3)$$

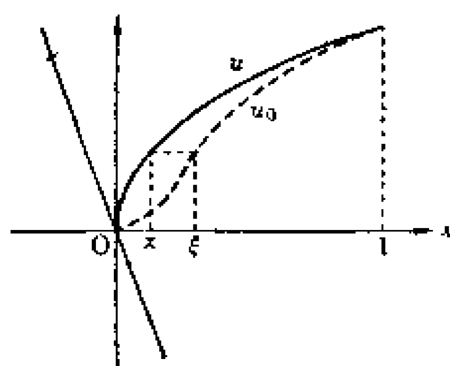


图 68.5　$q_0<-1,\ r_0=0$

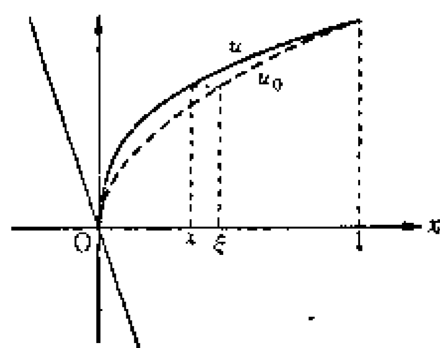


图 68.6　$-1\leqq q_0<0$

若让 $R_1^{(1)}$ 含此式的第 1 项，再根据 (68.1)，(68.2)，则知当 $\xi\to0$ 时，(65.27) 可写为

$$(qu_0-r)\dot{x}_1+\Big\{[O(\xi^{-q_0-1})+O(1)]$$

$$+\dot{q}_0\Big[\frac{r_0}{q_0}+O(\xi^{-q_0})+O(\xi)\Big]-O(1)\Big\}x_1=O(\xi^{-q_0-1}). \quad (68.4)$$

若 x_1 取常数，则可使两边的 $O(\xi^{-q_0-1})$ 相等，并且，消去 $R_1^{(0)}$ 中的最危险项 $O(\xi^{-q_0-1})$ 也是很容易的。同样地，可以把所有的 x_n 取为常数。

由上述，可预先选取依赖于 ε 的适当的常数 $\alpha(\varepsilon)$，$\beta(\varepsilon)$；今将 x，u 分别降 α，β 后，得到

$$x=\xi+\alpha(\varepsilon), \quad (68.5)$$
$$u(x)=v(\xi)+\beta(\varepsilon),$$

取由(68.5)所决定的 ξ，v 为独立变数。但是在 ξ-v 平面上，$\xi=0$，$v=0$ 为 (64.1) 的奇异点，假設所有的解曲綫都通过这个奇异点。为了达到这个目的的必要条件是：把(68.5)代入(65.1)后，所得的

$$\frac{dv}{d\xi}=\frac{r(\xi+\alpha)-q(\xi+\alpha)(v+\beta)}{\xi+\alpha+\varepsilon v+\varepsilon\beta} \quad (68.6)$$

右边的分母，分子，当 $v\to0$，$\xi\to0$ 时，同时成为 0．即

$$\alpha+\varepsilon\beta=0,\quad \gamma(\alpha)-\beta q(\alpha)=0, \quad (68.7)$$

或者，将由第 1 式所得的 β 代入第 2 式，再令 q，r 于原点为正則，

則得

$$\alpha = -\varepsilon\beta = -\varepsilon\frac{r(\alpha)}{q(\alpha)} = -\varepsilon\left\{\frac{r_0}{q_0} + \alpha\left(\frac{r}{q}\right)'_{\alpha=0} + O(\alpha^2)\right\}. \quad (68.8)$$

由此立刻知道，$\alpha = O(\varepsilon)$；第1近似为 $\alpha = -\varepsilon(r_0/q_0)$，将此代入右边，則得到

$$\alpha = -\frac{r_0}{q_0}\varepsilon - \frac{r_0(r_0 q_0' - r_0' q_0)}{q_0^3}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (68.9)$$

以 $-\varepsilon$ 除这个式子，便求出 β. 对于这样决定的 α, β, 由(68.7)，則(68.6)变为下列形式：

$$(\xi + \varepsilon v)\frac{dv}{d\xi} + q(\xi)v = r(\xi), \quad r(0) = 0. \quad (68.10)$$

(68.10)中的 q, r 与开始时的 q, r 不同，但在 $\xi = 0$ 处的 q 值与开始时的 q 值只能相差 $O(\alpha) = O(\varepsilon)$. 后者，由已讲过的逐次近似法便能証出。即設

$$v(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_n(\xi), \quad (68.11)$$

再代入 (68.10)，比較等冪項，則当 $u_n \to v_n$, $x_n = 0$ 时 (65.11) ~ (65.13)便給出逐次近似的各項，若参照(65.20)，(65.28)，則关于 v_0 及 $v_n (n = 1, 2, \cdots)$ 的积分分别为

$$\frac{d}{d\xi}\left\{v_n(\xi)\exp\int^{\xi}\frac{q(\xi)}{\xi}d\xi\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} r/\xi \\ -\sum_{m=0}^{n-1} v_{n-m-1}v_m/\xi \end{matrix}\right\}\exp\int^{\xi}\frac{q(\xi)}{\xi}d\xi, \quad (68.12)$$

再参照(65.21)，得到

$$v_0(\xi) = \xi^{-q_0}\tilde{p}(\xi)\int^{\xi}\frac{r}{\xi}\xi^{q_0}/\tilde{p}(\xi)d\xi$$

$$= O(\xi) + \begin{cases} O(\xi^{-q_0}) & (q_0 \neq -1, -2, \cdots), \\ O(\xi^{-q_0}\log\xi) & (q_0 = -1, -2, \cdots), \end{cases} \quad (68.13)$$

再用数学归納法，容易証明

$$v_n(\xi) = -\xi^{-q_0}\tilde{p}(\xi)\int \frac{\xi^{q_0-1}}{\tilde{p}(\xi)} \sum_{m=0}^{n-1} v_{m-n-1}v_m\, d\xi \qquad (68.14)$$

为

$$v_n(\xi) = O(\xi) + \begin{cases} O(\xi^{-q_0}(\log\xi)^n) \\ \qquad (q_0 \neq -1,\ -2,\ \cdots), \\ O(\xi^{-q_0}(\log\xi)^{\mu n+1}), \\ \qquad \begin{pmatrix} \mu=2: q_0=-1; \\ \mu=1: q_0=-2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}. \end{cases} \qquad (68.15)$$

另外，还出现 $O(\xi^{-(n+1)q_0-n}) = O(\xi^{-n(1+q_0)-q_0})$ 项，但只要 $q_0+1<0$，它就比前面的项小，所以没有什么影响。

如此得来的(68.11)，当 $\xi>0$ 时，好象是一致收斂的，但参照(68.5)，所得的第1近似：$u_0(x)=u_0(\xi)+\beta=v_0(x-\alpha)+\beta$ 如图68.5所示，在非常接近 $\xi=0(x=\alpha)$ 处，并不是好的近似。即对于(68.11)，比值 v_{n+1}/v_n 为 $\log\xi$ 或 $(\log\xi)^2$，作为 ε 的幂級数的收斂半徑与 $\log\xi$ 或 $(\log\xi)^2$ 的倒数成比例。

反过来，为了大体上了解奇异点的位置，令 $\varepsilon\log|\xi_0|=1$，则奇异点 ξ_0 与 $\xi=0$ 的距离 $|\xi|$ 为 $\xi_0 \propto \exp(-1/\varepsilon)$，这暗示着非常接近于0.

例

$$(\xi+\varepsilon v)\frac{dv}{d\xi} - v = 0 \qquad (68.16)$$

满足 $v(1)=1$ 的解，若設 $\xi=vz$，则可化为关于 z 的方程(齐次形)

$$(z+\varepsilon) - \left(v\frac{dz}{dv} + z\right) = 0, \qquad (68.17)$$

在条件 $v(1)=1$ 下积分，则得到

$$\xi = v(\varepsilon\log v + 1). \qquad (68.18)$$

(68.16)相当于 $q_0=-1$ 的情形，但当 $r=0$ 时，有 $v_0=\xi$，因而与 $q_0\neq-1$ 时的情形一致。若对 $\varepsilon\to0$，将(68.18)展成 ε 的冪級数，则为

$$\begin{aligned} v &= \xi(1+\varepsilon\log v)^{-1} = \xi[1-\varepsilon\log v + \varepsilon^2(\log v)^2 + O(\varepsilon^3)] \\ &= \xi[1-\varepsilon\log\xi + \varepsilon^2\{\log\xi + (\log\xi)^2\} + \cdots + O\{\varepsilon^n(\log\xi)^n\} + \cdots], \end{aligned} \qquad (68.19)$$

即証明了(68.15)。$v(\xi)$的奇异点(分岐点),可由于在(68.18)中,令

$$d\xi/dv=\varepsilon\log v+1+\varepsilon=0 \tag{68.20}$$

而得的

$$\xi_c=-\varepsilon\exp(-1-1/\varepsilon) \tag{68.21}$$

給出。ξ_c 当 $\varepsilon\to0$ 时，因为指数项的緣故，它接近于 0 确实比 ε 的任何冪都快。

§69 $-1<q_0<0$ 的情形

本問題的性质是已叙述过的两种情形的中間情况。若利用(68.5)的变换,使解曲綫通过 $\xi=0$, $v=0$,在处理上有好处。但这种方法不一定是必要的。如在(68.15)下所提到的注意那样,現在 $O(\xi^{-n(1+q_0)-q_0})$项，由于 $1+q_0>0$，故对于满足 $n>|q_0|/(1+q_0)$ 的 n 值是无界的，故此在进行逐次近似时,不定什么时候将会引起发散。为了排除这个情况，可使用在 $q_0>0$ 时所使用过的方法。为了把 $u_n(\xi)$取到 $O\{\xi^{-q_0}(\log\xi)^n\}$ 为止，可象在 $q_0>0$ 时一样，利用数学归納法証明 $x_1(\xi)$ 与 $x_n(\xi)$ $(n>1)$ 分别是由 (66.7) 与 $O\{\xi^{-q_0}(\log\xi)^{n-1}\}$ 所給出的。但是，应該注意 $r_0=0$，$-1<q_0<0$. 当 $q_0<0$,由于(68.5)便排除了 ξ^{-q_0-1} 所产生的危險。

奇异点出現在离 $\xi=0$ 的距离为 $\exp(-1/\varepsilon)$ 处，这与在 §68 中所叙述的一样。

例

$$(x+\varepsilon u)\frac{du}{dx}-ku=1+x^2,\quad 0<k<1. \tag{69.1}$$

$$u(1)=-1. \tag{69.2}$$

參照(68.5)～(68.9)，再假設

$$q=q_0=-k,\quad r(x)=1+x^2, \tag{69.3}$$

則由满足(68.8)，即

$$\alpha=\frac{\varepsilon}{k}(1+\alpha^2)\sim\frac{\varepsilon}{k}+\frac{\varepsilon^3}{k^3}+\cdots \tag{69.4}$$

的 α 所决定的变换:

$$x=\xi+\alpha, \quad u=v-\frac{\alpha}{\varepsilon}. \tag{69.5}$$

(69.1)有相当于(68.10)的形状，即

$$(\xi+\varepsilon v)\frac{dv}{d\xi}-kv=\xi^2+2\alpha\xi. \tag{69.6}$$

另外，边界条件(69.2)可写为

$$\xi=1-\alpha, \quad v=-1+\frac{\alpha}{\varepsilon}. \tag{69.7}$$

然后，可象以前一样地求形如

$$v=v_0(\eta)+\varepsilon v_1(\eta)+\cdots, \tag{69.8}$$

$$\xi=\eta+\varepsilon\xi_1(\eta)+\cdots \tag{69.9}$$

的解便可以了。即(69.6)乘以$\dot{\xi}=d\xi/d\eta$后，把(69.4)代入，则得

$$(\eta+\varepsilon\xi_1+\varepsilon v_0+\cdots)(\dot{v}_0+\varepsilon\dot{v}_1+\cdots)-k(v_0+\varepsilon v_1+\cdots)(1+\varepsilon\dot{\xi}_1+\cdots)$$

$$=\left(\eta^2+2\varepsilon\eta\xi_1+\cdots+\frac{2\varepsilon}{k}\eta+\cdots\right)(1+\varepsilon\dot{\xi}_1+\cdots), \tag{69.10}$$

由此，得到

$$\eta\dot{v}_0-kv_0=\eta^2, \tag{69.11}$$

$$\eta\dot{v}_1-kv_1=(\eta^2+kv_0)\dot{\xi}_1+(2\eta-\dot{v}_0)\xi_1+\frac{2\eta}{k}-v_0\dot{v}_0, \tag{69.12}$$

……………………………．

作为边界条件，首先将由(69.9)得到的

$$\eta=\xi-\varepsilon\xi_1(\eta)+O(\varepsilon^2)=\xi-\varepsilon\xi_1(\xi)+O(\varepsilon^2) \tag{69.13}$$

代入(69.8)，得到

$$v=v_0(\xi)+(\eta-\xi)\dot{v}_0(\xi)+\varepsilon v_1(\xi)+O(\varepsilon^2)$$

$$=v_0(\xi)-\varepsilon[\xi_1(\xi)\dot{v}_0(\xi)-v_1(\xi)]+O(\varepsilon^2), \tag{69.14}$$

把(69.7)代入，得到

$$-1+\frac{\alpha}{\varepsilon}=v_0(1-\alpha)-\varepsilon[\xi_1(1)\dot{v}_0(1)-v_1(1)]+O(\varepsilon^2), \tag{69.15}$$

另外，設

$$v_0(1-\alpha)=v_0(1)-\alpha\dot{v}_0(1)+O(\varepsilon^2), \tag{69.16}$$

把(69.4)代入，結果，对$v_0(1)$，$v_1(1)$，…得边界条件为

$$v_0(1)=-1+\frac{1}{k}, \tag{69.17}$$

$$v_1(1)=\xi_1(1)\dot{v}_0(1)+\frac{1}{k}\dot{v}_0(1)=\left[\frac{1}{k}+\xi_1(1)\right]\dot{v}_0(1), \qquad (69.18)$$

....

(69.11)的一般解为

$$v_0=A\eta^k+\frac{\eta^2}{2-k}, \qquad (69.19)$$

而 A 为常数，但通过(69.17)，A 可決定为

$$A=\frac{k^2-4k+2}{k(2-k)}. \qquad (69.20)$$

然而，把(69.19)代入(69.12)的右边后，奇异性最大的是它的最后一項，但是可取满足

$$kv_0\dot{\xi}_1-\dot{v}_0\xi_1=v_0\dot{v}_0\sim O(\eta^{2k-1}) \qquad (69.21)$$

的 ξ_1，即

$$\xi_1=\frac{-v_0}{1-k}, \qquad (69.22)$$

就能使右边成为 $O(\eta^{k+1})$. 綜合上述結果，作为最粗略的一致近似的参数表示为

$$u=-\frac{1}{k}+A\eta^k+\frac{\eta^2}{2-k}+O(\varepsilon), \qquad (69.23)$$

$$x=\eta+\varepsilon\left(\frac{1}{k}-\frac{A\eta^k}{1-k}-\frac{\eta^2}{(1-k)(2-k)}\right)+O(\varepsilon^2). \qquad (69.24)$$

§70 Lighthill 法对 $q_0=-\varkappa<0$ 的变形

Wasaw 指明了在 $q_0=-\varkappa<0$ 的情形下，对考查收斂性非常方便的 Lighthill 法的变形。首先，設 $r(0)=0$，取(68.10)为討論的基础。現在把(68.10)看成是以 t 为中間变数的特别形式（乘数 t 也可取为 $t+\varepsilon F_1(t)+\cdots$）. 并将它改写为

$$t\frac{d\xi}{dt}=\xi+\varepsilon v, \qquad (70.1)$$

$$t\frac{dv}{dt}=r(\xi)-q(\xi)v, \quad r(0)=0. \qquad (70.1')$$

这里的 q 和 r 在所討論的区域内是 ξ 的正則函数。因为这种形状

不象(68.10)那样具有一般性，因而不能展成象 Lighthill 法那样具有灵活性的形状，但因它有固定的形式，所以在証明收斂性等問題时很便利。另外，q_0 取負的整数值时出現了对数項，这样一来只能使討論复杂化，而对問題的本质来説并沒有什么影响。因而現在就設 q_0 不是整数。

在(70.1)中，若設 $\varepsilon=0$，則第 1 近似为

$$\xi=t. \tag{70.2}$$

将此代入(70.1′)，得对应于 v 的第 1 近似 v_0 的方程

$$t\frac{dv_0}{dt}+q(t)v_0=r(t),\quad r(0)=0. \tag{70.3}$$

参照(65.11)，(65.22)，再注意 $r(0)=0$，則此方程的解可写成下列形式：

$$v_0(\xi)=\xi^{\varkappa}Q_1(\xi)+\xi Q_2(\xi)=\xi^{\alpha}Q_0(\xi), \tag{70.4}$$

$$\alpha=\min(\varkappa,1).$$

这里的 Q_1, Q_2 当 $1>\xi\geqq 0$ 时，关于 ξ 为正則；Q_0 关于 ξ 和 $\xi^{\varkappa}$ 为正則，α 取 $\varkappa$ 与 1 中的較小者。在(70.1)，(70.1′)中，令

$$v=v_0(t)+w, \tag{70.5}$$

再利用 v_0 滿足(70.3)的性质，則得到

$$t\frac{d\xi}{dt}=\xi+\varepsilon(v_0+w), \tag{70.6}$$

$$t\frac{dw}{dt}=-q(t)w+R(\xi,w,t), \tag{70.7}$$

但是

$$R(\xi,w,t)=r(\xi)-r(t)-[q(\xi)-q(t)][v_0+w]. \tag{70.8}$$

現在以(70.2)，(70.3)，(70.5)为出发点来求近似。即将($\xi\sim t$, $v_0\gg w$)

$$\xi=t+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s(t)\varepsilon^s, \tag{70.9}$$

$$w=\sum_{s=1}^{\infty} v_s(t)\,\varepsilon^s \tag{70.10}$$

代入(70.6),(70.7)。再比較 ε 的同次項,則因为边界条件仅由 t 和 $v_0(t)$ 所滿足,故順次地解

$$t\,\frac{d\xi_s}{dt}=\xi_s+v_{s-1},\quad \xi_s(1)=0, \tag{70.11}$$

$$s>0$$

$$t\,\frac{dv_s}{dt}=-qv_s+h_s,\quad v_s(1)=0 \tag{70.12}$$

便可以了。这里的 h_s 为将 R 展成 ε 的冪时 ε^s 的系数,是 $\xi_1,\cdots,\xi_s;\ v_1,\cdots,v_{s-1};\ t$ 的函数。

因为(70.11),(70.12)与(65.22)同样,可以写成下列的积分形式:

$$\xi_s(t)=t\int_1^t \tau^{-2}v_{s-1}(\tau)\,d\tau, \tag{70.13}$$

$$v_s(t)=t^{\varkappa}\widetilde{p}(t)\int_1^t \tau^{-\varkappa-1}h_s(\tau)/\widetilde{p}(\tau)\,d\tau, \tag{70.14}$$

所以,在 $0\leqq t\leqq 1$ 中,若取适当大的常数 c,則可作下列的估計:

$$\xi_s(t)\leqq\max_{t\leqq\tau\leqq1}|v_{s-1}(\tau)|,\quad |v_s(t)|\leqq c\max_{t\leqq\tau\leqq1}|h_s(\tau)|. \tag{70.15}$$

另外,(70.8)中的 $r(\xi)-r(t)$, $q(\xi)-q(t)$ 能展成 $\xi-t$ 的冪級数,其系数的絕对值: $|(dr/d\xi)/n!|_{\xi=t}$ 等,若給与适当的常数 k, K, 則可使其小于 K/k^n. 从而,把 R 展成 $(\xi-t)$, w 的 2 重冪級数时,若参照(70.4)等,則知其各項系数的絕对值小于

$$\bar{R}(\xi,\,w,\,t)=K\,\frac{\xi-t}{k-(\xi-t)}(1+c\xi^{\alpha}+w) \tag{70.16}$$

的展开的各項系数的絕对值;在 $\bar{R}$ 作为 $(\xi-t)$, w 的冪級数的收斂域里,R 絕对收斂($\bar{R}$ 是 R 的优函数)。

然而,由于(70.15),(70.16),知道

$$\bar{\xi}=t+\varepsilon(ct^{\varkappa}+\bar{w}), \tag{70.17}$$

$$\bar{w}=c\bar{R}(\xi,\ \bar{w},\ t) \tag{70.18}$$

的幂級数的各項的絕对值总比关于 ξ, w 的 (70.9), (70.10) 的各項的絕对値大, 故是它們的优函数。若利用(70.16)～(70.18)則知,对 w 的优函数 $\bar{w}$ 的(70.18)式,可表示为封閉形

$$\bar{w}=cK\frac{\varepsilon(cK+\bar{w})}{k-\varepsilon(cK+\bar{w})}(1+cK+\bar{w}). \tag{70.19}$$

卽 $\bar{w}$ 若对与 t 无关的 δ, 有

$$|\varepsilon t^{\alpha}|<\delta, \tag{70.20}$$

則它关于 εt^{α} 为正則。所以,(70.9),(70.10)当

$$|\varepsilon|\leqq\delta t^{-\alpha},\quad \alpha=\min(-q_0,\ 1),\quad 0\leqq t\leqq 1 \tag{70.21}$$

时为絕对收斂。

Wasaw 还指明了在 $q_0>0$ 的情况下，关于前几节的 Lighthill 法,当 u 的級数(65.5),在 s 取有限值时,对 x 的級数有优級数,从而完全收斂。另外，关于 u 的級数为无限級数时，(65.4),(65.5) 所給出的解一般地是漸近解。

§71　其他情形与方法的界限

以上的方法不只是对 (65.1) 有效,現在举几个例题来說明这一点。

1) $x=0$ 为第1近似的高次的奇异点,現在求

$$(x^2+\varepsilon u)u'+u=x^2+2x^3 \tag{71.1}$$

在条件:

$$u(1)=1+\varepsilon \tag{71.2}$$

下的解。

将(65.4),(65.5)代入,再参照(65.6),則(71.1)可写为

$$[\xi^2+2\varepsilon\xi x_1(\xi)+\varepsilon u_0][\dot{u}_0+\varepsilon\dot{u}_1]+\{u_0+\varepsilon u_1-[\xi^2+2\varepsilon\xi x_1(\xi)+2\xi^3+6\varepsilon\xi^2 x_1(\xi)]\}(1+\varepsilon\dot{x}_1)+O(\varepsilon^2)=0, \tag{71.3}$$

(71.2)可写为

$$u_0(1)+O(\varepsilon)=1+e+O(\varepsilon). \qquad (71.4)$$

在(71.3),(71.4)中,使 ε 的同次项相等,则得到

$$\xi^2\dot{u}_0+u_0=\xi^2+2\xi^3, \qquad (71.5)$$

$$u_0(1)=1+e, \qquad (71.6)$$

$$\xi^2\dot{u}_1+u_1=-u_0\dot{u}_0-(u_0-\xi^2-2\xi^3)\dot{x}_1-(2\xi\dot{u}_0-2\xi-6\xi^2)x_1, \qquad (71.7)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

(71.5)有解

$$u_0=\xi^2+\exp(1/\xi). \qquad (71.8)$$

$\exp(1/\xi)$ 为齐次方程的解,由(71.6)知,其系数为1. u_0 当 $\xi=0$ 时有奇异点: $\exp(1/\xi)$,并可写为

$$u_0\dot{u}_0=-\frac{1}{\xi^2}\exp\left(\frac{2}{\xi}\right)-(1-2\xi)\exp\left(\frac{1}{\xi}\right)+2\xi^3. \qquad (71.9)$$

为了消去(71.7)右边的奇异性最高的第1项,可适当的选择 x_1,即使 x_1 当 $\xi\to0$ 时,满足

$$|-u_0\dot{u}_0-u_0\dot{x}_1-2\xi\dot{u}_0x_1|\ll|u_0\dot{u}_0|, \qquad (71.10)$$

即是

$$\left(\dot{x}_1-\frac{2}{\xi}x_1\right)\exp\left(\frac{1}{\xi}\right)-\frac{1}{\xi^2}\exp\left(\frac{2}{\xi}\right)=O\left[\exp\left(\frac{1}{\xi}\right)\right] \qquad (71.11)$$

便可以。(71.11)的解是

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{x_1}{\xi^2}\right)=\frac{1}{\xi^4}\exp\left(\frac{1}{\xi}\right)+O\left(\frac{1}{\xi^2}\right). \qquad (71.12)$$

由此,得到

$$x=\xi-\varepsilon\left[(1-2\xi+\xi^2)\exp\left(\frac{1}{\xi}\right)+O(1)\right]$$
$$+\varepsilon^2O\left[\exp\left(\frac{2}{\xi}\right)\right]. \qquad (71.13)$$

(71.8)与(71.13)在 $x\sim0$ 的近傍,在某一种程度上,能够给出同样好的近似。

对于(71.13)，若令 $x=0$，则与其对应的 ξ 值，即 ξ_1 近似于

$$\xi_1 \sim \varepsilon \exp\left(\frac{1}{\xi_1}\right), \tag{71.14}$$

两边取对数，则为

$$\xi_1 \sim \frac{1}{\log \xi_1 + \log(1/\varepsilon)}. \tag{71.15}$$

对于(71.15)，若 $\varepsilon \to 0$，则可知为 $|\log \xi_1| \ll |\log 1/\varepsilon|$。把(71.15)中的 $\log \xi_1$ 略去，然后代入(71.8)，再設 $\varepsilon \to 0$，则得到 $u(0)$ 的粗略的漸近估計

$$u(0) \sim \left[\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}\right]^{-1}. \tag{71.16}$$

但是，这个方法的逐次近似的收斂性并沒有得到証明。事实上，若于(71.1)中，設 $x^2=z$，则得到

$$(z+\varepsilon u)\frac{du}{dz} + \frac{1}{2\sqrt{z}}u = z + \frac{1}{2}\sqrt{z}, \tag{71.17}$$

这个式子虽然与(65.1)相似，但 $p(x)$，$r(x)$ 当 $z=0$ 时，都不是正則的，因而以前的証明法在这里就不能成立。但是这个方法对于了解当 $\xi \to 0$ 时，解的定性性质有很大的作用。

2) Wasaw 指出：一般地，在

$$[x+\varepsilon p_1(x, u)+\cdots+\varepsilon^s p_s(x, u)+\cdots]\frac{du}{dx}+q(x)u$$
$$= r(x)+\varepsilon r_1(x, u)+\cdots+\varepsilon^s r_s(x, u)+\cdots \tag{71.18}$$

中，若 p_s，r_s 关于 u 至多是 s 次的多項式时，前几节的討論在这里仍然成立。当 r_1 为 u^3，或者为 $\sin \alpha u$ 的情形，虽然还得不到保証，但与 1) 同样，也可能得到一个有用的結果。

3) 2阶的常微分方程或者联立方程

$$\{x+\varepsilon(v'+a(x)v)\}v''+q(x)v'+s(x)v=r(x), \tag{71.19}$$

当設 $v'=u$ 时，则化为联立方程

$$[x+\varepsilon u+\varepsilon a(x)v]u'+qu+sv=r, \tag{71.20}$$

$$v'=u. \tag{71.21}$$

所不同的仅仅是 $\varepsilon avu'+sv$ 项和 v，但是，若将 x, u 分别展成(65.4)，(65.5)的形状，把 v 展成(65.5)的形状，则可与1阶的情形同样地求近似。

$q_0>0$ 时，由(65.23)，(71.21)显然可知，当 $\xi\to 0$ 时，有 $v_0\ll u_0$，作为第1近似的 u_0 可由(65.22)給出，$x_0+\varepsilon x_1$ 可由(66.12)給出，又由(71.21)知，v_0 为

$$v_0=\int u_0\,d\xi. \tag{71.22}$$

$q_0<0$ 时，也与前几节的方法差不多。首先，当 $q_0<-1$ 时，把 x, u 减去一个常数，可使(71.20)中 u' 的系数和 r 于 $\xi=0$ 时为0即可。当 $-1<q_0<0$ 时，把 $q_0>0$ 和 $q_0<-1$ 时的方法合并起来用便可以了。

4) **非綫性振动的周期解** 把(64.25)一般化后，成为

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u=\varepsilon f\left(u,\ \frac{du}{dx}\right), \tag{71.23}$$

现在研究它的周期解。第1近似是 $a\cos x$，将此代入右边后，再作 $f(a\cos x,\ -a\sin x)$ 的 Fourier 展开：

$$f(a\cos x,\ -a\sin x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{71.24}$$

如所周知，只要不是 $a_1=b_1=0$，则当 $t\to\infty$ 时，第2近似就是发散的，故沒有周期解。

对于(71.23)，利用(65.4)，(65.5)把独立变数换成 ξ，再考虑

$$\frac{du}{dx}=u'=\frac{\dot u}{\dot x}, \tag{71.25}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=u''=\frac{1}{\dot x}\,\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\dot u}{\dot x}\right)=\frac{\ddot u}{\dot x^2}-\frac{\dot u\ddot x}{\dot x^3}, \tag{71.26}$$

则得到

$$\frac{\ddot{u}_0+\varepsilon\ddot{u}_1+\cdots}{(1+\varepsilon\dot{x}_1+\cdots)^2}-\frac{(\dot{u}_0+\varepsilon\dot{u}_1+\cdots)(\varepsilon\ddot{x}_1+\varepsilon^2\ddot{x}_2+\cdots)}{(1+\varepsilon\dot{x}_1+\cdots)^3}+u_0+\varepsilon u_1+\cdots$$

$$=\varepsilon f\left(u_0+\varepsilon u_1+\cdots;\ \frac{\dot{u}_0+\varepsilon\dot{u}_1+\cdots}{1+\varepsilon\dot{x}_1+\cdots}\right). \qquad (71.27)$$

将此展成 ε 的幂，则得到

$$\ddot{u}_0+u_0=0, \qquad (71.28)$$

$$\ddot{u}_1+u_1=2\dot{x}_1\ddot{u}_0+\ddot{x}_1\dot{u}_0+f(u_0,\ \dot{u}_0), \qquad (71.29)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

对于(71.28)的解 $u_0=a\cos\xi$，再利用(71.24)，则(71.29)的右边可写为

$$-2a\dot{x}_1\cos\xi-a\ddot{x}_1\sin\xi+a_0+a_1\cos\xi+b_1\sin\xi$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n\cos n\xi+b_n\sin n\xi). \qquad (71.30)$$

设

$$x_1=\frac{a_1}{2a}\xi, \qquad (71.31)$$

便可把项 $a_1\cos\xi$ 消去。同时有 $\ddot{x}_1=0$. 为了消去其余的危险项 $b_1\sin\xi$，只有使 $b_1=0$. 即

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(a\cos\xi,\ -a\sin\xi)\sin\xi\,d\xi=0, \qquad (71.32)$$

此式可看成是确定振幅 a 的方程。于是 u_0, u_1, $\cdots$ 成了关于 ξ，周期为 2π 的周期函数。关于 x 的周期 T，可如下求之：即由(65.4)，(71.31)所得的关系式

$$x=\xi+\varepsilon\cdot\frac{a_1}{2a}\xi+O(\varepsilon^2)=\xi\left[1+\frac{a_1}{2a}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right] \qquad (71.33)$$

中，令 $\xi=2\pi$，则得到

$$T=2\pi\left[1+\frac{a_1}{2a}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right]$$

$$=2\pi+\frac{\varepsilon}{a}\int_0^{2\pi}f(a\cos\xi,\ -a\sin\xi)\cos\xi\,d\xi. \quad (71.34)$$

在(64.36)中，令 $\omega=1$ 而得的結果，不外乎是在(71.34)中，令 $a_1=-3/4a^3=-3/4A^3(f=-u^3)$ 的特别情形。

§72 偏微分方程

1) 到現在为止所讲的方法中，最能直接应用的是：含有与小参数 ε 有关的拟綫性項 G 的双曲型方程

$$\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y}\Phi+F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X},\ \frac{\partial\Phi}{\partial Y},\ \Phi,\ X,\ Y\right)+\varepsilon G=0. \quad (72.1)$$

这里的 G 表示含有 Φ 的2阶为止的偏微商和 X, Y 的拟綫性函数。由偏微分方程的理論知道，所有2阶綫性的双曲型方程都可包括在(72.1)的当 $\varepsilon\to0$ 的情形之內。即(72.1)是这类方程的标准形。正交的二曲綫族：$X=$常数及 $Y=$常数，是当 ε 为0时的方程的特征綫，在它們上或在垂直于它的方向($Y=$常数，$X=$常数)上 Φ 的微商有奇异性和不連續的話，則沿着特征綫这种奇异性将要扩大(奇异特征曲綫)。現在对于(72.1)作变数变换：

$$x=\overline{X}\overline{Y},\quad \overline{X}=X-X_0,\quad \overline{Y}=Y-Y_0 \quad (72.2)$$

$$y=y(X,\ Y) \quad (72.3)$$

(X_0, Y_0 为常数)。由此，再考虑

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)=\frac{\partial}{\partial X}\left(\overline{X}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\overline{X}\left(\overline{Y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)$$

$$+\frac{\partial^2 y}{\partial X\partial Y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial Y}\left(\overline{Y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right), \quad (72.4)$$

則左边就变成下列形式：

$$(x+\varepsilon g_1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\left(\bar{X}\frac{\partial y}{\partial X}+\bar{Y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

$$+\frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+F_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\Phi,x,y\right)$$

$$+\varepsilon G_1=0. \tag{72.5}$$

这里，g_1 是 x, y, $\partial^2\Phi/\partial x\partial y$, $\partial^2\Phi/\partial y^2$, $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$, Φ 的函数；而 G_1 是由 G 除掉 $g_1\partial^2\Phi/\partial x^2$ 的結果。

若考虑(72.2)，則知，(72.5)当 $\varepsilon=0$ 时的特征綫是

$$0=\left(\bar{X}\frac{\partial y}{\partial X}+\bar{Y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2-4x\frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y}$$

$$=\left\{\bar{X}\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)-\bar{Y}\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\right\}^2, \tag{72.6}$$

显然可知，其中一条是由

$$\bar{X}=0,\quad \bar{Y}=0\quad 即\ x=0$$

給出的。对于(72.5)若只考虑对 x 的微分，則在形状上与(71.19)完全一样，$x=0$ 为第1近似解的奇异点，所以成为奇异特征綫，这时使用普通地逐次近似法当然是不大方便的，因而其处理方法应該与对待(71.19)同样，即把 x 求成(65.4)的形状。但是在实际問題中，完全沒有必要把方程改成(72.5)的形状，只要对于原方程的特征曲綫坐标施行上述的处理方法便可以了。例如，对于(72.5)的 X, Y 即是，$X=X_0$ 或者 $Y=Y_0$ 与 $x=0$ 是等价的，这由于(72.2)，(72.6)是很明确的。

例

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \tag{72.7}$$

若設

$$\partial\Phi/\partial x=u, \tag{72.8}$$

便可写成簡单的形式

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varepsilon u\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{72.9}$$

由(72.7)知，当 $\varepsilon=0$ 时，这方程的特征曲綫是 $x=$常数及 $y=$常数。现在假設解 $u_0(x)$ 对 $x\to 0$ 有奇异性

$$\partial\Phi_0/\partial x=u_0=f(x)\sim Ax^{-q_0}+u_0(0). \tag{72.10}$$

卽 $x=0$ 是 $\varepsilon=0$ 时的奇异特征曲綫。例如，在边界条件：$y=0$, $u=f(x)$下，那末显然可知：u_0 有形如(72.10)的奇异性。在偏微分方程里，也象在这个例子中所見到的那样，常常由边界条件或者初始条件导入奇异性。仿照(71.19)的解法，設

$$u=u_0(\xi,\eta)+\varepsilon u_1(\xi,\eta)+\cdots, \tag{72.11}$$

$$x=\xi+\varepsilon x_1(\xi,\eta)+\cdots, \tag{72.12}$$

$$y=\eta, \tag{72.13}$$

然后再施行逐次近似便可以。

对 x, y 微分(72.12)，則有

$$\begin{aligned}1&=\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(1+\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\xi}+\cdots\right),\\ 0&=\frac{\partial\xi}{\partial y}\left(1+\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\xi}+\cdots\right)+\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\eta}+\cdots,\end{aligned} \tag{72.14}$$

卽

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=1-\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\xi}+O(\varepsilon^2),\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\eta}+O(\varepsilon^2) \tag{72.15}$$

成立，所以，(72.9)的偏微分

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}, \tag{72.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}, \tag{72.17}$$

分别可写为

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left[1-\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\xi}+O(\varepsilon^2)\right]\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial\eta}-\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}. \tag{72.18}$$

把这个結果和(72.11)代入(72.9)，比較 ε 的各次冪，則得

$$\varepsilon^0:\ \frac{\partial u_0}{\partial\eta}=0, \tag{72.19}$$

$$\varepsilon^1:\ \frac{\partial u_1}{\partial\eta}=u_0\frac{\partial u_0}{\partial\xi}+\frac{\partial x_1}{\partial\eta}\frac{\partial u_0}{\partial\xi}=\left(u_0+\frac{\partial x_1}{\partial\eta}\right)\frac{\partial u_0}{\partial\xi}, \tag{72.20}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

参照(72.10)，則知(72.19)的解是

$$u_0=u_0(\xi)\sim u_0(0)+A\xi^{-q_0}\quad(\xi\to 0).\tag{72.21}$$

特别注意 $x\sim 0$ 的近傍。为了根据(72.21)消除(72.20)的危险项 $u_0(\partial u_0/\partial\xi)$ 于 $\xi\to 0$ 的奇异性，可以根据 q_0 的値取最低限为

$$q_0>0,\qquad x_1=-A\eta\xi^{-q_0},\tag{72.22}$$

$$q_0\leqq -1,\qquad x_1=-\eta u_0(0),\tag{72.23}$$

$$-1<q_0<0,\quad x_1=-\eta[u_0(0)+A\xi^{-q_0}],\tag{72.24}$$

从到现在为止所作的討論来看，这个事实是很明显的。

2) 但是，于上述的例子中，若能选擇适当的 $x_1, x_2, \cdots$，使(72.20)以下的各式的右边都等于0，則問題就变成非常簡单了，卽变成了已討論过多次的理想的情形。然而，这样选得的 $x_1, x_2, \cdots$ 的值，换句話說，(x, y) 与 (ξ, η) 之間的关系与什么对应呢？此时上例中的 $u_1, u_2, \cdots$ 都成了与 η 无关的，ξ 的函数。这样的 ξ，在偏微分方程里不外是特征坐标。

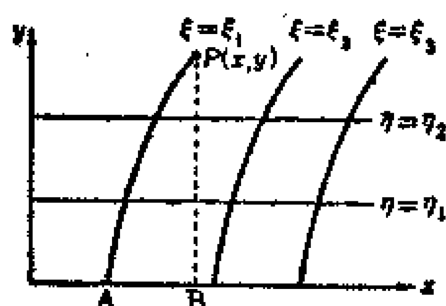


图　72.1

例如，綫性方程

$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\xi\partial\eta}=0\tag{72.25}$$

的特征坐标是 ξ, η，其解可写为

$$\Phi_0=f_1(\xi)+f_2(\eta),\tag{72.26}$$

但是，若再附加上条件：$\eta=0,\ \Phi_0=f_1(\xi)$，则 $f_2\equiv 0$，而 Φ_0 只是 ξ 的函数。这样的場普通称为单一波。其他如进行波的方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}\tag{72.27}$$

的解

$$\Phi_0=f_1(x-ct)\tag{72.28}$$

也为其一个例子，它表示以速度 c 朝着 x 的正方向行进的波（注意：不包含逆方向的波 $f_2(x+ct)$）。

(72.7)的特征曲綫可由微分形式

$$dx\,dy+\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial x}dy^2=0 \tag{72.29}$$

表示。将此分解因式，則得到

$$d\xi=dx+\varepsilon u\,dy=0, \tag{72.30}$$

$$d\eta=dy \qquad =0. \tag{72.31}$$

ξ, η 为特征坐标，在特征曲綫(72.30)，(72.31)上各取一定值。积分(72.30)，(72.31)，則得到

$$\xi=x+\varepsilon\int_{\xi=\text{常数}}u\,dy, \tag{72.32}$$

$$\eta=y, \tag{72.33}$$

于是可知(72.12)，(72.22)～(72.24)确实是(72.32)，(72.33)的近似式。

3) 更一般地来說：对于双曲型方程的 Lighthill 法的实质，不外是想得到精确度尽可能高的非綫性方程的近似特征曲綫 $\xi=$常数，$\eta=$常数，再以輔助变数 ξ, η 表示解。最理想的是 ξ, η 本身就是特征坐标。

例如，以(72.32)連結的严密式的特征坐标 ξ 和綫性化时的特征坐标 x 只有微小的差；同时可見，以 $\Phi=f(x)$ 作为单一波的場 $\Phi=f(\xi)$ 的近似，好象也沒有多大差异的样子。但是，若将(72.32)的积分积到 y 为无穷大时，則其差便有可能成为非常大。它們之間的关系，由图便显然可看出来。为了簡单起見，設 $y=0$, $\xi=x$。由下而上的看 PA, PB, 則前者与 A 处的初始值，后者与 B 处的初始值相等，其差可能与 y 同时无限的增大。这些与已見过的非綫性振动的例题很相似。因为若把那时的时間 t 换成 y 来想，則选取正的特征坐标为独立变数与采取正的位相是完全对应的。

Lighthill, Whitham, Lin, Fox 等不仅将上述想法应用于单一波的情形，还应用于几个重要的問題上，也获得了很大的成功[47],[48],[51~53]。

对于(72.1)，若将后者的方法归納成一般的形状，则为把

$$\Phi=\Phi_0(\xi,\ \eta)+\varepsilon\Phi_1(\xi,\ \eta)+\cdots, \qquad (72.34)$$

$$X=\xi+\varepsilon x_1(\xi,\ \eta)+\cdots, \qquad (72.35)$$

$$Y=\eta+\varepsilon y_1(\xi,\ \eta)+\cdots \qquad (72.36)$$

代入(72.1)的同时，由(72.1)的特征曲綫的条件式

$$-dX\,dY+\varepsilon[A\,dX^2-B\,dX\,dY+c\,dY^2]=0 \qquad (72.37)$$

作变换 $(X,\ Y)\to(\xi,\ \eta)$ 的逐次近似即可。在单一波和进行波的情形下，設 $X=\xi$ 或 $Y=\eta$ 也可以。另外，在研究球面波远离原点处的性质时作为 ε，也可以不取常数，而取与原点距离的平方的倒数，因为取这样小的变数将会有很大的方便。

4) 关于双曲型以外的偏微分方程的有名的应用例子，还有通过避开薄物体的二維势(potential)流的近似解法在駐点附近的发散(Lighthill[47],[48])，使前緣的发散消除，因而增高了通过平板的粘性流的边界层近似的精确度的郭永怀的工作[50]等。关于后者在本丛书《粘性流体理論》中，有詳細的解說，可参考。

如以上所述，Lighthill 法的优点是非常有系統，可以清楚的看出在各点处坐标的縮小或扩大，在全区域内解能以单一的形式表达等，但，例如当 $\varepsilon\to0$ 時，第2近似在場内有两个以上的奇异点时，就不一定好用了。这时必須有即将介紹的，把場分成几个部分，然后再将各部分妥当的解合攏起来的边界层法的帮助才行。

§73　边界层法

WKB 法，Poincaré-Lighthill-郭永怀的方法是非常有效的方法，但因受应用范圍所限，故很难說它是一个万能的方法。与此相

反，它們的原型的边界层法，虽然不是那么有系統，但具有一定的广泛的应用范圍。其起源的边界层理論可参考《粘性流体理論》，現在仅就簡单的例題概述其特点。

1) 在条件：$y=\pm b$，$u=0$ 下，求

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+Pe^{i\omega t} \tag{73.1}$$

的周期解。但設 $\nu\ll 1$．它的物理意义相当于动粘性率为 ν 的粘性流体在沟 $|y|<b$ 中，以与 $Pe^{i\omega t}$ 成比例的变压力陡度而引起的强制振动。

若設

$$u=ve^{i\omega t}, \tag{73.2}$$

則(73.1)可以写成

$$\nu\frac{d^2v}{dy^2}-\varkappa^2 v+P=0, \tag{73.3}$$

边界条件可以写为

$$y=\pm b,\quad v=0. \tag{73.4}$$

但是 $\varkappa=\sqrt{i\omega}$ 取正的实数部分。

假若 d^2v/dy^2，$\varkappa^2 v$，P 是相同的量，則(73.3)的第1項可以略去（此时2阶的微分方程退化成0阶。即退化成代数方程），从而可以写成

$$v_{外}=\frac{P}{\varkappa^2}, \tag{73.5}$$

但是它不能满足(73.4)．由(73.4)便可明显地看出，还存在不能略去 $\nu d^2v/dy^2$ 的地方。这种地方就是 $y=\pm b$ 的近傍。即当 ν 充分小时，(73.5)对于 $|y|<b$ 能給出很好的近似值(不受壁的影响，而与外力同时动的非粘性解)，但在 $|y|\sim b$，为了满足条件(73.4)，需要 v 立即成为0，这时 d^2v/dy^2 成为充分大，并保持 $\nu d^2v/dy^2$ 为有限。$y\sim\pm b$ 近傍的区域称为边界层。

为了研究 $y\sim b$ 的近傍的形状，如所周知，可作变数变换

$$Y=\nu^{-\alpha}(b-y),\quad \alpha>0. \tag{73.6}$$

此时(73.3)可写为

$$\nu^{1-2\alpha}\frac{d^2v}{dY^2}-\varkappa^2 v+P=0. \tag{73.7}$$

为了使第1项与其他项为同程度的，可令 $1-2\alpha=0$，即选取

$$\alpha=\frac{1}{2} \tag{73.8}$$

便可。此时，边界条件：$y=b$ 即 $Y=0$，$v=0$ 没有改变，但对于边界层的外部 $y\neq b$，根据(73.6)，(73.8)则必须考虑 $Y\to\infty$；因而，作为另外一个条件($y=-b$，$v=0$ 之外)首先应该要求当 $Y\to\infty$ 与 $v_外$ 光滑的接合。由观察便可知，满足

$$Y=0,\quad v=0, \tag{73.9}$$

$$Y\to\infty,\quad v\to v_外=\frac{P}{\varkappa^2} \tag{73.10}$$

的(73.7)的解是

$$v_i=\frac{P}{\varkappa^2}(1-e^{-\varkappa Y}). \tag{73.11}$$

(由(73.10)舍去了齐次方程的与 $e^{\varkappa Y}$ 成比例的特解。) 这是边界层内部的解。就 $v_外$ 来看，边界层的外缘为 $y-b\to 0$；就 v_i 来看，则为 $Y\to\infty$，因而注意到这两者已經接合的很好。若設

$$Y=\nu^{-1/2}(y+b), \tag{73.12}$$

则对存在于 $y\sim -b$ 的边界层的解，可以完全同样地去求。

若将(73.3)，(73.4)的精确解

$$v=\frac{P}{\varkappa^2}\left[1-\frac{\cosh(\varkappa y/\sqrt{\nu})}{\cosh(\varkappa b/\sqrt{\nu})}\right] \tag{73.13}$$

对于 $|y|<b$，$y\sim b$，$y\sim -b$ 并且 $\nu\ll|\varkappa b|^2$ 展开之，则立即可得上述的結果。对于更一般的問題，例如对任意的管的情形(很少有精

确的解)，上述的近似法不用改变便可适用。作为一个实例，試在光滑的閉曲面 S 上，在条件 $u=0$ 下，解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+Pe^{i\omega t}. \tag{73.14}$$

这是在垂直于 x, y 面的軸方向有压力陡度的管中的流。作代换(73.2)，在 S 上，在条件 $u=0$ 下，解

$$\nu\Delta v-\varkappa^2 v+P=0 \tag{73.15}$$

便可。与此相仿的問題，在 WKB 法中亦曾研究过(§63)。

边界层外部的解为(73.5)是显而易見的。关于与 S 邻近的边界层内的解的求法，与在 WKB 法中的作法一样，使用 S 的法綫 s (其方向是指向 S 的內部) 与其定方向的傾角 θ 为独立变数的正交曲綫坐标，于是(73.15)可写为

$$\nu\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}-\frac{1}{R-s}\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{1}{R-s}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{R-s}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right\}-\varkappa^2 v+P=0, \tag{73.16}$$

这里 $R(\theta)$ 是 S 的曲率半徑(S 向內凹时設为正)；ds, $(R-s)d\theta$ 分別为当 θ, s 为一定时坐标曲綫的綫元素。

(73.6)，(73.12)同样設

$$Y=\nu^{-1/2}s, \tag{73.17}$$

扩大其法綫方向，則(73.16)可写为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}-\frac{\sqrt{\nu}}{R-\sqrt{\nu}Y}\frac{\partial v}{\partial Y}+\frac{\nu}{R-\sqrt{\nu}Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{R-\sqrt{\nu}Y}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)-\varkappa^2 v+P=0, \tag{73.18}$$

若 S 沒有尖角，曲率 $1/R$ 停止在普通大小，則第 2、第 3 項可以忽視。此时(73.18)与(73.3)的形狀完全相同，并且可知与(73.5)光滑接合的解是(73.11)。边界层的厚度是很薄的，作为第 1 次近似

来説曲率的影响是可以忽视的。这样一来，管中的流对第1次近似来說，正如(73.5)所示，它是由于压力陡度而象剛体那样移动(因$\varkappa=\sqrt{i\omega}$，故位相只差$\pi/2$)的内部的核心(core)和为了满足边界处的粘着条件而存在的薄边界层所构成的，边界层内部的場，在垂直它的方向的空間变化是很大的。另外，对于(73.18)若把解展成$\sqrt{\nu}$的幂級数，則得到与(63.41)相同的結果。

2) 以上是就簡单的情形說明了近似的大体情况。其要点可列为：

(i) 适当地把問題化为无量綱，使区域，非齐次項，大部分的无量綱的参数为普通的大小时，則最高阶的微分的系数ε显然是非常小。

(ii) 求$\varepsilon=0$的方程的解。由于这方程比原方程的阶数低，所以一般是不可能使所有的边界条件都滿足。

(iii) 在推定边界层的位置的同时，导入法綫方向的长适当扩大了的坐标Y，在新的坐标下，再作保留最高阶的項使它和其余的主要項大小相同的方程。也就是作边界层的方程。作为当$Y\to\infty$(边界层外緣)的条件，要求与(ii)的解是光滑地接合。假若作到了这一点，便可以肯定边界层位置的推定已經正确了。

以上这些就是边界层近似的技巧。

相当于(i)的手續在1)的例題中沒有作过，例如在(73.3)，(73.4)中，若設$y=b\eta$，将它改写为

$$\left(\frac{\nu}{\varkappa^2b^2}\right)\frac{d^2v}{d\eta^2}-v+\frac{P}{\varkappa^2}=0,\quad \eta=\pm1,\quad v=0,\qquad(73.19)$$

若使令$\varepsilon=[\nu/(\varkappa^2b^2)]$，$P/\varkappa^2$为无量綱的参数，$\eta$为无量綱的变数，則可看出对研究問題确实是很方便的。

另外，如在上例中所見到的那样，所研究的边界层不一定仅限于一个。根据問題的性质可能产生种种情形。因此，应該象在

WKB法中所見到过的那样：将区域分成几个部分，求其各个部分的妥当的解的同时使其适当地結合起来。

3) 今举簡单的例題。

(i) $\varepsilon\dfrac{d^2u}{dx^2}+\dfrac{du}{dx}=P$, $0\leqq x\leqq 1$, $u(0)=0$, $u(1)=1$. (73.20)

解

$$u_{外}=Px+1-P,\quad \frac{du_{外}}{dx}=P,\quad u_{外}(1)=1, \tag{73.21}$$

$$u_i=A(1-e^{-\xi})+\varepsilon P\xi,\quad x=\varepsilon\xi,$$
$$\frac{d^2u_i}{d\xi^2}+\frac{du_i}{d\xi}=\varepsilon P,\quad u_i(0)=0. \tag{73.22}$$

在边界层 ($x\sim 0$) 的解 u_i 中，忽視 $\varepsilon P\xi$ 項也没有什么影响。$u_{外}$ 和 u_i 分别为写在它右边的方程的解，常数 A 由条件：于 $u_{外}$, $x\to 0$；于 u_i, $\xi\to\infty$，而确定为

$$A=1-P. \tag{73.23}$$

在上述的解中，$\varepsilon=0$ 的解滿足了条件：$x=1$，因而，在 $x=0$ 处出現了边界层，現在假若使条件 $x=0$ 滿足，并設

$$u_{外}=Px, \tag{73.24}$$

究竟能怎样呢？这时边界层的位置只能是 $x=1$. 若設

$$1-x=\varepsilon\xi, \tag{73.25}$$

則出現相当于(73.21)的

$$\frac{d^2u_i}{d\xi^2}-\frac{du_i}{d\xi}=\varepsilon P,\quad u_i(\xi=0)=1, \tag{73.26}$$

但是，其解

$$B(e^{\xi}-1)+1+\varepsilon P\xi, \tag{73.27}$$

当 $B\neq 0$ 时，則对 $\xi\to\infty$ 发散，若 $B=0$, 除非 $P=1$, 否則就与(73.24)矛盾。从而，在 $x=1$ 处考虑边界层是不合理的。用上述的結論与(73.20)的精确解，即

$$u=(1-P)\frac{1-\exp(-x/\varepsilon)}{1-\exp(-1/\varepsilon)}+Px \tag{73.28}$$

比較就可知，由于漸近解的性质，很难使其直到 $1-\exp(-1/\varepsilon)$ 都符合。

4) **于(65.1)，当 $q_0>0$ 的情形下，求 $u_0(0)$ 的值** (65.1)是非綫性的，也不是标准形；但是，可以看到 $x=0$ 是边界层。

$\varepsilon=0$ 时的解 $u_外(x)$ 就是由(65.22)，(65.23)所給出的 $u_0(x)$. u_0 当 $x\to 0$，而为

$$u_0\sim Ax^{-q_0} \tag{73.29}$$

的条件是：当 $x\to 0$ 时，它为无穷大，这样一来，显然是破坏了 $\varepsilon u\ll x$ 的假定。为了求 $x=0$ 近傍的解，应該作变数变換

$$x=\varepsilon^{\alpha}X,\quad u=\varepsilon^{-\beta}U. \tag{73.30}$$

X, U 是普通大的量。u 的标度(scale)也在变，这是由于問題的非綫性的原故；因而，必然不能預先知道 u 的大小程度。α, β 也只在以后才能确定，但是从 $u_外$ 来看，当 $x\sim 0$ 时 u 是相当大的，所以在上式中，不妨設 $\alpha>0$, $\beta>0$. 若把(73.30)代入(65.1)，则由 q, r 关于 x 的正則性，可得出

$$(\varepsilon^{\alpha}X+\varepsilon^{1-\beta}U)\varepsilon^{-(\alpha+\beta)}\frac{dU}{dX}+[q_0+O(\varepsilon^{\alpha})]\varepsilon^{-\beta}U$$
$$=r_0+O(\varepsilon^{\alpha}). \tag{73.31}$$

为了使主要項的大小相同，設

$$\alpha=1-\beta \tag{73.32}$$

便可。于是(73.31)归結为

$$(X+U)\frac{dU}{dX}+q_0U+O[\max(\varepsilon^{\alpha},\ \varepsilon^{\beta})]=0. \tag{73.33}$$

在(73.33)中，若略去小的項，并选取 U 为独立变数，则容易积分出下列結果：

$$X=-\frac{U}{q_0+1}+cU^{-\frac{1}{q_0}}\quad (c\text{ 为常数})。\tag{73.34}$$

然后，由(73.29)和(73.34)确定未知的常数 α, β 及 c 便可。在边界层解(73.34)中，若令 $X\to\infty$, 则于边界层的外緣有

$$U\sim\left(\frac{c}{X}\right)^{q_0},\tag{73.35}$$

将此代入(73.30)后，得的

$$u\sim\varepsilon^{-\beta}\left(\frac{c\varepsilon^{\alpha}}{x}\right)^{q_0}=\varepsilon^{q_0\alpha-\beta}\left(\frac{c}{x}\right)^{q_0}\tag{73.36}$$

是外部解，为了使其符合于 $x\to0$ 时的(73.29)，可令 $c=A^{1/q_0}$, $\beta=q_0\alpha$, 然后再与(73.32)联立，取

$$\alpha=\frac{1}{1+q_0},\quad \beta=\frac{q_0}{1+q_0},\quad c=A^{1/q_0}\tag{73.37}$$

便可以了。

在(73.34)中，若令 $X=0$, 则利用(73.37)，便得

$$U(0)=\{(q_0+1)c\}^{\frac{q_0}{q_0+1}}=A^{\frac{1}{q_0+1}}(q_0+1)^{\frac{q_0}{q_0+1}},\tag{73.38}$$

再由(73.30)，(73.37)，得

$$u(0)=A^{\frac{1}{q_0+1}}\left(\frac{\varepsilon}{q_0+1}\right)^{-\frac{q_0}{q_0+1}}.\tag{73.39}$$

这与把(66.13)代入(65.23)后的主项完全一致。

由上述可知，边界层法应根据不同的情形采取适当的手段。另外，在进行逐次近似的过程中，常常会遇到困难，但是它在各个区域中的解的形状非常具体，因而，是适合于观察物理性质的方法。重要的是应該很好的运用各种方法的特长，求出与真实的解最接近的解。

参考文献

由本书所采用的观点来看，以所有微分方程的近似解法为主题的現成的书比較少，下列书籍可說是典型的。

[1] Л. В. Канторович, В. И. Крылов: Приближенные Методы Высшего Анализа (ГИТТЛ, Москва, 1952).

[2] L. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen (Springer, Berlin, 1955).

[3] W. E. Milne: Numerical Solutions of Differential Equations (Wiley, New York, 1953).

[1] 是以椭圓型微分方程为对象的，其中包括着在本书中已删去的等角映象的应用及其他；这本书不論从理論或实际方面来說，都是极有价値的，値得一讀的好书。[2] 是网罗計算实例和注重实地計算的巨著，但通讀并不一定适当。另外，松弛法也是計算法中的一种，但限于本书的处理风格，結果被省略了，对于松弛法有下列专书：

[4] R. V. Southwell: Relaxation Methods in Engineering Science (Oxford Univ. Press, Oxford, 1940).

[4'] R. V. Southwell: Relaxation Methods in Theoretical Physics, I (1946), II (1956), (Clarendon, Oxford).

[5] D. N. Allen: Relaxation Methods (McGraw-Hill, New York, 1954).

形成我們所探討的近似解法的背景的解析学的各分支，或者包括各种应用數学的参考书，除本丛书中的相应的书外，还可举出下列各书：

[6] 寺澤寛一：自然科學者のための数学概論(岩波)。

[7] 犬井鉄郎：应用偏微分方程式論(岩波)。

[8] 山内恭彦：物理数学(岩波全书)。

[9] 河田龙夫：应用数学概論 I, II (岩波全书)。

[10] R. Courant, D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, I, II (Springer, Berlin, 1937). (I 有英文版)。

[11] P. M. Morse, H. Feshbach: Methods of Theoretical Physics, I, II (McGraw-Hill, New York, 1953).

[12] H. Jeffreys: Methods of Mathematical Physics (Camb. Univ. Press, Cambridge, 1956).

[13] В. И. Смирнов: Курс Высшей Математики (ГИТТЛ) (Москва, 1957).

有很多的泛函分析入門的书籍，其中与本书比較相近，而且容易讀的有下列几种：

[14] 吉田耕作：位相解析，I, II（本讲座）（即本丛书中程其襄譯：泛函分析。譯者注）。

[15] 加藤敏夫：函数空間論（共立）。

[16] L. A. Ljusternik, W. I. Soboleff: Elemente der Funktionalanalysis (Akademie Verlag, Berlin, 1955).（由俄語翻譯过来的有中譯本）

第1章～第4章

关于第1，2章的主要参考书是上述的[1]，关于第3章的主要参考书是上述的[2]．积分方程的适当的参考书有[6]，[10]，[13]．下列的书籍特别与第5章的关系密切。

[17] 日高孝次：积分方程式論（河出）。

与本书所探討的逐次近似法有关的綜合报告，搜集在：

[18] L. Collatz: Einige Anwendungen funktionalanalytischer Methoden in der praktischen Analysis, ZAMP, 4 (1953).

关于第4章希讀

[19] 加藤敏夫：变分法とその应用（本讲座）（即本丛书中周怀生譯：变分法及其应用。——譯者注）。

关于第4章还可举出下列具有特色的参考书：

[20] G. Temple, W. G. Bickley: Rayleigh's Principle (Dover, 1956).

[21] S. H. Gould: Variational Methods for Eigenvalue Problems (Tronto Univ., Tronto, 1957).

本书是求特征值的上下界的 Weinstein-Aronszajn 法的解說书。

第5章～第6章

关于用差分法的近似解法，在上述的[1]，[2]，[3]中都有很詳細的叙述。尤其是本书所涉及的理論問題，大部分是根据下列书籍：

[22] В. С. Рябенкий, А. Ф. Филиппов: Об Устойчивости Разностных Уравнений (ГИТТЛ) (Москва, 1956).

此书还举出了很多文献。依据差分法的近似解法是現代正在发展的方法，在

各杂志上发表的論文也很多。以应用为主的研究是由 Collatz 一派人发表在 ZAMM 杂志上。J. Math. Phys. 上也經常提出很有趣味的論文，但最近在 Comm. Pure Appl. Math. 上也多起来了。其中的

[23] J. Todd: Comm. Pure Appl. Math., **9** (1956), 597.

[24] G. E. Forsythe: Comm. Pure Appl. Math., **9** (1956), 425.

[25] H. F. Weinberger: Comm. Pure Appl. Math., **9** (1956), 613.

对要了解現代趋向的讀者有很大帮助。

从数学的观点研究差分法近似法的有：

[26] R. Courant, K. O. Friedrichs, H. Lewy: Math. Ann., **100** (1928), 32.

这是一个古典的名著。但著者的一派的研究成果，大部分是发表在 Comm. Pure Appl. Math. 杂志上。另外，最近具有特色的研究的是：

[27] P. D. Lax: Difference Approximations of Linear Differential Equations—An Operator Theoretical Approach, Symposium on Partial Differential Equations (Univ. of Kansas, 1957).

最近研究的最有趣味的問題是 Tricomi 方程，关于这个問題的专題論文有：

[28] А. Ф. Филиппов: Изв. А. Н. СССР сер. Мат., **21** (1957), 73.

这篇論文又是关于利用方程的特性曲綫和特殊格子研究問題的好文献。

另外，与差分法的近似解法有密切关系的数值积分法，数値計算法的好书甚多，今列举其中的一部分如下：

[29] 日高孝次：数值积分法(岩波)。

[30] 宇野利雄：数値計算論(岩波)。

[31] 林 桂 一：数値計算の理論と应用(岩波)。

[32] 柴垣和三雄：計算法(朝仓)。

[33] F. B. Hildebrand: Introduction to Numerical Analysis (McGraw-Hill, New York, 1956).

[34] Zdeněk Kopal: Numerical Analysis (Chapman-Hall, London, 1955).

[35] J. B. Scarborough: Numerical Mathematical Analysis (Johns Hopkins, Baltimore, 1950).

第 7 章

关于具体的計算例子和应用，可参考[11]的有关各章和量子力学。关于与綫性算子有关的摄动論的数学理論方面，可参考下列书籍：

[36] T. Kato: On the convergence of the perturbation method, 东大理学部紀要, 6 (1951), 145.

及其所引用的文献。另外，关于非綫性問題的

[37] J. J. Stoker: Nonlinear Vibrations (Inter. Sci. Pub., New York, 1950). (有中譯本)

是把 Appendix I 作为攝动論的基础。

第 8 章

这一章的参考书为[11]及

[38] A. Erdélyi: Asymptotic Expansions (Dover, 1956).

本书是用参数依存性的数学理論，比 WKB 法更簡洁地研究了鞍点法、普通的漸近展开法及其他較复杂的情形。

有关的論文兹仅举其部分于下：

[39] R. E. Langer: Phys. Rev., 51 (1937), 669.

[40] R. E. Langer: Comm. Pure. Appl. Math., 3 (1950), 427.

[41] C. L. Pekeris: J. Appl. Phys., 17 (1946), 1108.

[42] I. Imai: Phys. Rev., 74 (1948), 113, 80 (1950), 1112.

[43] I. Imai: I. R. E. Trans. AP—4 (1956), 233.

[44] R. Mckelvey: Trans. Amer. Math. Soc., 79 (1955), 103.

[45] H. Hasimoto: J. Phys. Soc. Japan, 10 (1955), 397.

[46] J. B. Keller, R. M. Lewis, B. D. Seckler: Comm. Pure Appl. Math., 9 (1956), 207.

第 9 章

[47] 物理学論文选集 80, 应用数学 IV, PLK 法(日本物理学会)。

从 Lighthill 的最初的論文开始，Kuo, Wasaw, Whitham, Carrier 等的重要文献都搜集在这里。

[48] H. S. Tsien: Advances in Appl. Mechanics IV (Academic Press, New York, 1956).

本书中对于在第 9 章中未曾涉及到的橢圓型方程的应用，以及必須同时使用边界层法的情形，即关于 Wu 的縮粘性流的吸入流的解說，都有詳尽的論述。

[49] 高見穎郎: PLK 法，日本物理学会志解說，13 (1958), No. 1.

本文也是一个簡洁的解說书。

与 PLK 法有关的論文甚多，除与本书沒有直接关系的或可由其他論文代替的外，兹举其有代表性的于下：

[50] Y. H. Kuo: J. Math. Phys., **32** (1953), 83.
[51] G. B. Whitham: Proc. Roy. Soc., **201** (1950), 89; **203** (1950), 571.
[52] C. C. Lin: J. Math. Phys., **33** (1954), 117.
[53] P. A. Fox: J. Math. Phys., **34** (1955), 133.
[54] G. F. Carrier: Advances in Appl. Mech., III (1953), 1.
[55] J. C. Cooke: J. Phys. Soc. Japan, **11** (1956), 1181.